FICHE N°2 - CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

Calcul littéral

a- Égalités des expressions littérales

Des expressions sont littérales quand elles sont écrites avec des lettres. Elles sont égales quand elles donnent le même résultat quel que soit le nombre remplaçant chacune des lettres de l'expression. S'il y a une seule valeur pour lesquelles l'égalité n'est pas vérifiée, alors ces expressions ne seront pas égales.

On distingue trois types d'expressions :

- Les sommes – La dernière opération à effectuer (en respectant les règles de l'ordre de calcul) est une somme ou une différence (addition ou soustraction)
- Les produits – La dernière opération à effectuer (en respectant les règles de l'ordre de calcul) est un produit (multiplication)
- Les quotients – La dernière opération à effectuer (en respectant les règles de l'ordre de calcul) est un quotient (division)
  – Elles sont souvent exprimées sous formes de fractions

b- Développer et réduire des expressions littérales

Réduire ou simplifier une expression = l'écrire avec le moins de termes possibles.
Développer une expression = l'écrire sous la forme d'une somme d'expressions simples.

- Propriété de distributivité
  $a(b + c) = ab + ac$
  $-(a + b) = -a - b$
  $-(a - b) = -a + b$
- Propriété de double distributivité
  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- Les identités remarquables
  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

c- Factoriser une expression littérale

FICHE N°2 - CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

Factoriser une expression = l'écrire sous la forme d'un produit, en utilisant les propriétés des opérations et les identités remarquables dans « l'autre sens ».

- **Propriété de distributivité** — $ab + ac = a\,(b + c)$
  $-a - b = -\,(a + b)$
  $-a + b = -\,(a - b)$
- **Propriété de double distributivité** — $ac + ad + bc + bd = (a + b)\,(c + d)$
- **Les identités remarquables** — $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Les équations

Une équation est une égalité conditionnelle qui contient une ou plusieurs inconnues. Elles sont représentées par des lettres.
L'identité est une égalité vraie, quelles que soient les valeurs données aux lettres.
L'équation est une égalité qui n'est pas nécessairement vraie pour toutes les valeurs.

a. Equations à une inconnue

- **Équation du 1er degré** — $ax = b$
  x est l'inconnue et a et b des nombres réels
- **Équation produit** — $(ax + b)\,(cx + d) = 0$
  Quels que soient a et b, $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$

Les valeurs pour lesquelles l'égalité est vraie sont les solutions de l'équation. Résoudre une équation c'est trouver l'ensemble de ces solutions.
Deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.

Pour résoudre une équation, on commence souvent par rechercher une équation qui lui est équivalente et qui est plus facile à résoudre.
Pour cela, il existe 3 règles :

- Simplifier chacun des membres (développer ou factoriser).
- Ajouter ou retrancher aux deux membres une même expression algébrique.

FICHE N°2 - CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

- **Multiplier** ou **diviser** les deux membres par un même nombre non nul.

b. Système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

- Système de 2 équations du 1er degré à 2 inconnues

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels

Un couple de deux nombres qui vérifie simultanément les deux équations est solution du système.

Les inéquations

a. Inéquations du 1er degré à une inconnue

Les inéquations du 1er degré à une inconnue sont équivalentes aux inéquations de la forme :

$ax < b$ $\quad$ $ax \leq b$ $\quad$ $ax > b$ $\quad$ $ax \geq b$

Pour résoudre une inéquation, il faut la ramener à l'une des formes précédentes.

Pour cela, il existe 4 règles :

- **Simplifier** chacun des membres (développer ou factoriser).
- **Ajouter** ou **retrancher** aux deux membres une même expression algébrique.
- **Multiplier** ou **diviser** les deux membres par un même nombre positif.
- **Multiplier** ou **diviser** les deux membres par un même nombre négatif à condition de changer le sens de l'égalité.

b. Système de deux inéquations du 1er degré à deux inconnues

- Système de 2 inéquations du 1er degré à 2 inconnues

$$\begin{cases} ax + by + c < 0 \\ a'x + b'y + c' < 0 \end{cases}$$

a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels

Les signes peuvent être remplacés par $>$, $\leq$ ou $\geq$.

Pour résoudre ce système d'inéquations, on utilise le plus souvent une méthode graphique, qui permet de visualiser toutes les solutions.

FICHE N°2 - CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

METHODE

1) Résoudre une équation de la forme $ax = b$

- Si l'équation est différente de la forme $ax = b$, la transformer pour qu'elle prenne la forme $ax = b$. Utiliser les 3 règles vues plus haut.
- Si $a \neq 0$, l'équation ne possède qu'une solution : $\frac{b}{a}$
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors tout nombre réel est solution de l'équation.

<u>Exemple</u> : Résoudre $4(2 + x) = 7 - 2x$
→ On développe le premier membre : $8 + 4x = 7 - 2x$
→ On additionne $2x$ aux deux membres : $8 + 4x + 2x = 7 \cancel{-2x}$
→ On soustrait 8 aux deux membres : $\cancel{8} + 4x + 2x = 7 - 8$. On obtient : $6x = -1$
→ Dans cette équation, x est différent de 0. On peut donc diviser les deux membres par 6
$\cancel{6}x = -1 \div 6$.
→ $x = \frac{1}{6}$ est la solution de l'équation.

2) Résoudre un problème par une mise en équation

- Choisir les inconnues les plus pertinentes en fonction du problème (parfois il est intéressant de choisir une autre inconnue que celle suggérée par l'énoncé).
- Traduire les informations fournies par des égalités ou des inégalités. On obtient peu à peu des équations ou des inéquations.
- Résoudre l'équation obtenue en utilisant les 3 règles citées dans la leçon.
- Conclure en interprétant les résultats obtenus en fonction de l'exercice. Si on a le temps, vérifier le résultat obtenu.

<u>Exemple</u> : Lucette pense à un nombre. Elle lui ajoute 3 et multiplie le résultat obtenu par 3. Jeanne pense au même nombre que Lucette. Elle l'ajoute à 8. Toutes deux trouvent le même résultat. Quel est le nombre auquel elles ont pensé ?
→ On choisit comme inconnue le nombre auquel pense Lucette. On l'appelle x.
→ Lucette ajoute 3 au nombre de départ donc on obtient $x + 3$
→ Elle multiplie le nombre obtenu par 3, donc on obtient : $(x + 3) \times 3$
→ Jeanne choisit le même nombre x au départ. Elle lui ajoute 8. On obtient $x + 8$
→ Le nombre trouvé par Lucette et celui trouvé par Jeanne sont égaux. On en déduit l'égalité suivante : $(x + 3) \times 3 = x + 8$

FICHE N°2 - CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

→ *Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation :*

$$(x + 3) \times 3 = x + 8$$
$$3x + 9 = x + 8$$
$$3x - x = 8 - 9$$
$$2x = -1$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

→ $x = -\frac{1}{2}$ *est la solution de l'équation. C'est le nombre que Lucette et Jeanne ont choisi.*

3) Résoudre un système de deux équations du 1^er^ degré à deux inconnues

***Méthode 1* : par substitution**

- *Tirer y de la première équation.*
- *Remplacer* y *par son expression en fonction de* x *dans la deuxième équation.*
- *Chercher l'inconnue* x.
- *Chercher l'inconnue* y.
- *Noter la solution.*

***Méthode 2* : par combinaison**

- *Égaliser les coefficients de* y *(ou de* x*) dans la première équation.*
- *Supprimer l'inconnue* y *(ou* x*).*
- *Chercher l'inconnue* x.
- *Chercher l'inconnue* y.
- *Noter la solution.*

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

Méthode 1

→ $2x + y = 3$, *donc* $y = 3 - 2x$

→ *On obtient :* $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 3x + 2(3 - 2x) = -5. \end{cases}$ *Développée, cette équation est égale à* $-x + 6 = -5$.

→ *On obtient :* $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ -x + 6 = -5. \end{cases}$ *On en déduit que* $x = 11$

→ *Si* $x = 11$, *alors il suffit de remplacer* x *dans la première équation pour trouver y.*

→ $2 \times 11 + y = 3$, *donc* $22 + y = 3$. *On en déduit que* $y = 3 - 22$, ***soit*** -19.

→ *Le système a pour solution le couple* $(11\ ;\ -19)$.

FICHE N°2 - CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

Méthode 2

→ *On égalise les coefficients de y :* $2x + y = 3$ → $-4x - 2y = -6$

$3x + 2y = -5$ → $3x + 2y = -5$

→ *On additionne les deux équations membres à membres. On obtient :* $-x = -11$, *donc* $x = 11$.

→ *La suite de la résolution est la même que dans l'exercice précédent.*

4) Résoudre un système de deux inéquations du 1er degré à deux inconnues

- *Simplifier chaque inégalité.*
- *Tracer, dans un repère, les deux droites associées à l'inéquation en remplaçant les signes de comparaison par le signe =.*
- *Pour les coordonnées d'un point situé dans un demi-plan déterminé par l'une des deux droites, chercher le signe de l'expression algébrique associé à cette droite (+ ou −).*
  Si ce signe est le même que celui qui figure dans l'équation correspondante, tout le demi-plan est hachuré. Sinon c'est l'autre demi-plan qui est hachuré. On procède de la même manière pour les deux droites.
- *La partie du plan hachurée deux fois contient tous les points dont les coordonnées sont solutions du système d'inéquations.*