CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Première partie

Les opérations élémentaires

1) Les quatre opérations

Vous connaissez les quatre opérations usuelles, appelées aussi lois : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Il n'y en a en réalité que deux : l'addition et la multiplication. Nous allons voir plus tard que la soustraction et la division ne sont que deux cas particuliers de l'addition et de la multiplication.

a- Addition et multiplication

Voici un tableau récapitulatif des différentes propriétés que vous avez pu apprendre lors de votre scolarité.

Propriétés de la loi	Addition +	Multiplication ×
Interne	$si\ a,b\ \in\ \mathbb{R}, alors\ a\ +\ b\ \in\ \mathbb{R}$	$Si\ a,b\ \in\ \mathbb{R}, alors\ a\ \times\ b\ \in\ \mathbb{R}$
Associative	$(a\ +\ b)\ +\ c\ =\ a\ +\ (b\ +\ c)$	$(a\ \times\ b)\ \times\ c\ =\ a\ \times\ (b\ \times\ c)$
Commutative	$a\ +\ b\ =\ b\ +\ a$	$a\ \times\ b\ =\ b\ \times\ a$
Neutre	$a\ +\ 0\ =\ a$	$a\ \times\ 1\ =\ a$
Symétrique	$oppos\acute{e}\ -a\ de\ a$	$(Pour\ a\ 6\ \neq\ 0)\ inverse\ \frac{1}{a}\ de\ a$

1 : La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$a\ \times\ (b\ +\ c)\ =\ a\ \times\ b\ +\ a\ \times\ c.$$

On reviendra plus tard sur les règles de priorité dans les calculs.

2 : Règle des signes : le produit de deux nombres de même signe est positif (même si ces deux nombres sont négatifs !), tandis que le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

3 : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul. C'est-`a-dire, que si $a\ \times\ b\ =\ 0$, alors n´ecessairement $a\ =\ 0$ ou $b\ =\ 0$.

b- Soustraction et division

La soustraction et la division ne sont que des cas particuliers de l'addition et de la multiplication. En effet, soustraire, c'est ajouter l'opposé, et diviser, c'est multiplier par l'inverse.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

On définit la soustraction de deux nombres a et b de la manière suivante :

$$a - b = a + (-b)$$

On définit la division de deux nombres a et b 6= 0 de la manière suivante :

$$a : b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Désormais, nous ne traiterons donc que l'addition et la multiplication, et nous pourrons appliquer les différentes propriétés aux opposés et inverses.

2) Comparaison et division euclidienne

a- Comparaison

Afin d'utiliser les adjectifs "plus que" et "moins que", il a été placé sur l'ensemble des nombres, une relation d'ordre. C'est elle qui permet d'affirmer que 1 est plus petit que 2. Elle est notée $\leq$, signifie "plus petit que", et est compatible avec l'addition et la multiplication. Le symbole opposé ("plus grand que") est noté $\geq$.

On a les relations suivantes :

- Si $a \leq b, alors\ a + c \leq b + c$.
- Si $a \leq b\ et\ c \geq 0, alors\ a \times c \leq b \times c$

Remarque : Il peut arriver qu'on omette le signe $\times$ avec des lettres, lorsque aucune confusion n'est possible.

b- Division euclidienne

Si la division n'est qu'une multiplication cachée, opération entre deux nombres réels, la division euclidienne est une opération bien différente. Elle opère entre deux entiers. On donne ici le théorème et la définition, mais nous reverrons plus tard la manière de procéder pour effectuer une division euclidienne.

Théorème : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers (q, r), tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Effectuer la division euclidienne, c'est trouver cet unique couple. On dit que a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste dans la division euclidienne.

3) Calcul de fractions

Nous reviendrons plus tard sur ce chapitre, mais voici les règles qu'il faut respecter lorsqu'on calcule des fractions. Ces règles doivent être apprises et connues par cœur.
Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs, avec b, c, d tous les trois non nuls.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Pour démontrer des égalités de fractions, on utilise des produits en croix :

 # 4 : *Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs, avec b, d non nuls.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ si et seulement si } a\times d=b\times c$$

*Remarque : **Attention !** On ne peut pas diviser par 0. Dorénavant, à chaque fois que vous écrirez une fraction, assurez-vous que le dénominateur soit bien non nul.*

4) Puissance et racine carrée

a- Puissance

Définition : On définit la puissance d'un nombre de la manière suivante :

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Pour tout nombre $a \neq 0$,
- *Pour tout entier* $n > 0,\ a^n = a \times \_\_\_\_ \times a$ $\quad n\ fois$
- *Pour tout entier* $n > 0,\ a^{-n} = \frac{1}{a} \times \_\_\_ \times \frac{1}{a}$ $\quad n\ fois$

De plus,

Pour tout nombre $a \neq 0,\ a^0 = 1$

et

Pour tout entier $n > 0, 0^n = 0$

Les règles de calcul suivantes doivent aussi être connues et apprises par cœur
Pour tout $a \neq 0, b \neq 0$, *pour tout* n, m *entiers non nuls :*

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n\times m} \qquad (a\times b)^n = a^n \times b^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad 1^n = 1$$

Identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

b- *Racine carrée*

La racine carrée est l'opération symétrique du carré. On se doit de connaitre les règles de calcul suivantes :

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Pour tous $a > 0$; $b > 0$, on a :

$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Remarque : Attention ! La racine carrée n'a pas un bon comportement avec l'addition

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

5) Règles de priorité

Il y a certaines règles de priorité à respecter lorsqu'on calcule des nombres.

5 : Dans une succession de calculs, on calcule dans l'ordre suivant :

1. Les opérations dans les parenthèses
2. Les puissances
3. Les multiplications et divisions (de gauche à droite)
4. Les additions et soustractions (de gauche à droite)

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Deuxième partie

Proportionnalité

Nous allons voir des situations de proportionnalité, et de non proportionnalité. Si tout le monde a une idée de ce qu'est la proportionnalité, voyons plutôt la définition formelle.

1) Définition

Soient deux suites de nombres $u = (u_1, \_\_\_, u_n)$ et $v = (v_1, \_\_\_, v_n)$.
On dit que la suite (u) est proportionnelle à la suite (v) lorsqu'il existe un coefficient k, appelé coefficient de proportionnalité, tel que pour chaque i :

$$u_i = k \times v_i$$

Cette définition parait obscure, mais elle explique en totalité la notion de proportionnalité. On peut aussi associer à une relation de proportionnalité une fonction linéaire $f : x \rightarrow kx$, où k est le coefficient de proportionnalité. Alors, on dit que la suite u est l'image par f de la suite v.

2) Propriétés

a- Propriétés de linéarité

#1 : 1. Image de 0 : L'image de 0 est 0.
2. Unité : L'image de 1 est k.
3. Propriété de linéarité additive : Si x et x' ont pour images y et y', alors $x + x'$ a pour image $y + y'$.
4. Propriété de linéarité multiplicative : Si x a pour image y, alors pour tout m, mx a pour image my.

b- Interprétation à l'aide d'un tableau

Considérons une situation de proportionnalité, entre deux suites de valeurs $u = (u_1, \_\_\_, u_n)$ et $v = (v_1, \_\_\_, v_n)$ et de coefficient de linéarité k. La plupart des propriétés vues précédemment peuvent s'écrire au sein d'un tableau de valeurs, qui sera aussi très utilisé à l'école.

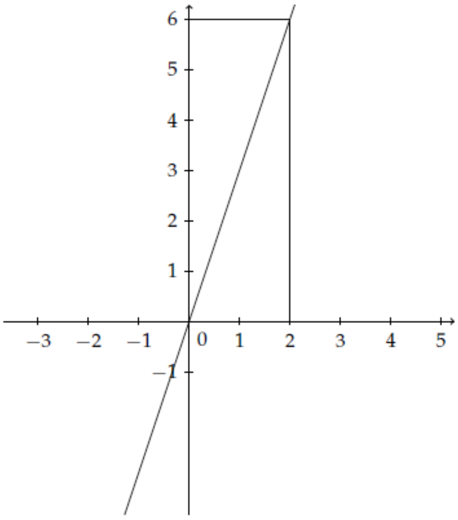
valeurs	u_i	1	0	x	x'	$x+x'$	mx
images	v_i	k	0	$y=kx$	y'	$y+y'$	my

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

c- Représentation graphique

 # 2 : *Si l'on veut modéliser par un graphique les situations de proportionnalité, en notant les x en abscisse et les y en ordonnée, il y a proportionnalité si et seulement si la courbe est une droite passant par l'origine du repère.*

Exemple, x représente le nombre de tartes et y le prix en fonction du nombre de tartes, et si j'achète 0 tartes, je paye 0 €, et plus j'achète de tartes, plus je paye cher, mais toujours proportionnellement par rapport au prix d'une tarte.
En lisant sur le graphique, quel est le prix de deux tartes ?



3) Premiers exemples d'application de la proportionnalité

a- C'est les soldes !

Les bien connus « pourcentages » ne sont que des applications du principe de proportionnalité. Il s'agit d'appliquer un coefficient de proportionnalité à un prix (par exemple). Le symbole % est à lire $\frac{}{100}$.
Par exemple, connaissant le prix x d'une robe, si elle est en solde, rabaissée de 30%, c'est que le prix de la robe est de :

$$x - \frac{30}{100}x = x\left(1 - \frac{30}{100}\right) = \frac{70}{100}x$$

Il faut retenir ceci :

- ***Augmenter une valeur x de $p\%$ revient à multiplier x par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$***

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

- ***Diminuer une valeur x de $p\%$ revient à multiplier x par $(1-\frac{p}{100})$.***

Voici des indications de méthodes :

- ***On utilise un tableau de proportionnalité :***

Valeur initiale	Valeur soldée
?	x
100	100 - p

Puis on fait un produit en croix pour trouver la valeur :

$$? = \frac{x \times 100}{100 - p}$$

Notons que l'on peut faire la même chose si la valeur a augmenté :

Valeur initiale	Valeur augmentée
?	x
100	100 - p

Où cette fois-ci on n'a pas enlevé p, mais ajouté p.

b- Encore une histoire de pourcentages

Exemple : Les informations relatent : "Il y a eu 3500 morts liées aux armes à feu aux Etats-Unis de plus que l'année dernière, où 30 000 décès étaient à dénombrer." Quel est le pourcentage d'augmentation ?

Ici encore, c'est un problème de proportionnalité : Si une valeur augmente de $p\%$ sur une valeur initiale x, alors la proportion de hausse est de $\frac{p}{x}$, et le pourcentage de hausse est de $\frac{p}{x} - 100\%$

L'augmentation de morts par armes à feu en un an est donc de $\frac{3500}{30000} \times 100\%$

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

c- Bien avant les GPS…

L'échelle d'une carte (ou d'une maquette), nous permet de déterminer la distance réelle entre deux points, grâce à la distance sur la carte. Ici encore, c'est une des applications de la proportionnalité. Si deux points A ***et*** B ***sont situés à une distance*** x ***l'un de l'autre sur la carte, et que deux autres points*** C ***et*** D ***sont situés à cette même distance*** x ***sur la carte, alors dans la réalité, les points*** A ***et*** B***, et*** C ***et*** D ***sont situés à la même distance l'un de l'autre.***

Définition ***: On dit que l'échelle d'une carte est de*** $\frac{1}{a}$ ***lorsqu'un centimètre sur la carte représente en réalité*** a ***centimètres.***

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Troisième partie

Calcul littéral

En fait, dès que l'on remplace des nombres par des lettres dans un calcul, nous réalisons du calcul algébrique, ou du calcul littéral.
Une des premières difficultés liées à l'usage de l'algèbre est de bien comprendre le rôle de la lettre, dans une expression algébrique. Ces différents rôles sont bien explicités, dans le document « Ressources pour les classes de 6e, 5e ,4e, 3e du collège, Du numérique au littéral au collège » édité par le ministère de l'´éducation nationale.

1) Mais quel intérêt ?

a- Indéterminée

Lorsqu'on demande la formule de l'aire d'un rectangle, on répond souvent au collège $l \times L$. Cela signifie que, une fois la longueur L et la largeur l données, nous sommes capables de trouver effectivement l'aire de ce rectangle.
Ainsi donc, la lettre remplace une valeur, qui nous sera donnée. On peut ainsi se la représenter.

b- Variable

Maintenant, supposons que l'on ne fixe pas forcément la largeur du rectangle, et qu'on veuille déterminer l'aire en fonction de cette largeur. Alors, la lettre l devient maintenant une variable. Ce n'est plus une unique valeur, mais elle peut prendre plusieurs valeurs.
On retrouve très souvent ce cadre lorsqu'on travaille avec des fonctions.

$$f : x \to 3x + 4.$$

c- Inconnue

Si maintenant, on veut trouver la largeur d'un rectangle dont la longueur vaut 20 et l'aire vaut 40. Alors la lettre l devient une inconnue. Il s'agit maintenant de trouver la (ou les) bonne valeur de l (et ce, en se demandant si ces valeurs existent, ou non).

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

d- Paramètre

Il se peut aussi que l'on veuille travailler avec différentes valeurs de l, sans forcément les fixer, et sans forcément prendre l pour une variable. Alors, la lettre est maintenant vue comme un paramètre, dont on peut choisir la valeur, et qui peut changer au cours du temps si on le veut.

2) Développer et factoriser

a- Développer

Que signifie développer une expression ? Une expression mathématique est parfois présentée comme un produit de facteurs, par exemple :

$$A(x) = (x + 1)(x - 3).$$

Ici, on écrit $A(x)$ car l'expression dépend de x (x est donc ici une variable). Parfois, on aime à regrouper différemment cette expression en rangeant les puissances de x dans l'ordre (souvent décroissant), en bref, transformer un produit de facteurs en somme de termes. On développe, puis réduit l'expression.

Reportons-nous au tableau des règles de priorité dans les calculs pour le bon fonctionnement du développement mathématique. Notons que lorsqu'on a deux facteurs avec des puissances identiques de x, on peut les ajouter, comme ici $-3x$ et x. On dit qu'on regroupe les termes en x.

Exemple : Développer et réduire l'expression A :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 1)(x - 3) \\ &= x \times x + (-3) \times x + 1 \times x + (-3) \times 1 \\ &= x \times x - 3 \times x + x - 3 \\ &= x^2 - 2x - 3. \end{aligned}$$

b- Factoriser

On peut aussi effectuer l'opération contraire. Lorsqu'on veut écrire une expression sous forme d'un produit de facteurs, on dit qu'on factorise l'expression.
Il s'agit de reconnaître une identité remarquable (on renvoie au tableau au début du cours). Souvent, on cherche à factoriser une expression $A(x)$ dans le but de résoudre l'équation $A(x) = 0$ en utilisant le fait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Exemple : Identité remarquable

$$A(x) = x^2 - 25$$
$$= (x + 5)(x - 5).$$

Autre exemple plus compliqué :
Factoriser l'expression A (x) :

$$A(x) = x^2 + 2x + (x + 2)(x - 1)$$
$$= x(x + 2) + (x + 2)(x - 1)$$
$$= (x + 2)\big(x + (x - 1)\big)$$
$$= (x + 2)(2x - 1).$$

On peut maintenant déterminer quand cette expression est nulle.

3) Exploitation graphique

Quand on demande à quelqu'un de définir une fonction mathématique, la notion est souvent vague. En voici une définition formelle.

a- Définition

Une fonction mathématique est un élément f , qui, à un x donné associe une unique image, notée $f(x)$.
On écrira :

$$f : x \to f(x).$$

Si $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x, tandis que x est un antécédent de y. Attention, s'il n'y a qu'une image à un nombre, il peut exister plusieurs antécédents. Vous connaissez quelques fonctions.

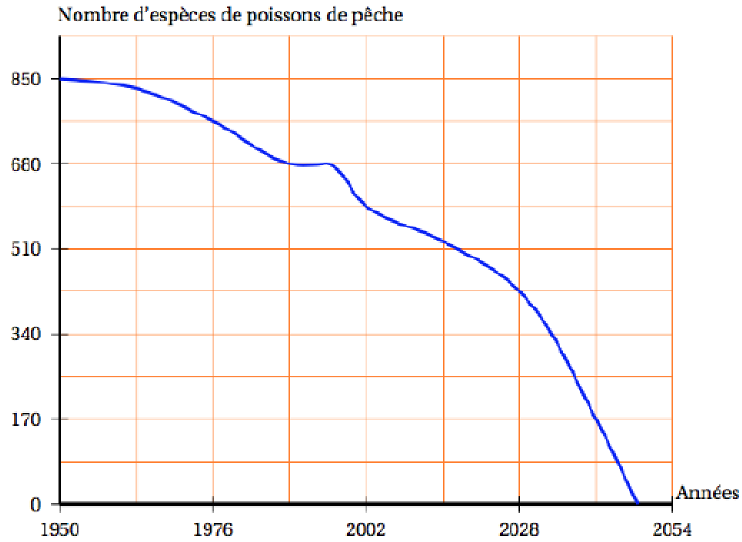
Voici les deux plus importantes :

- Les fonctions linéaires : $f : x \to ax$, où a est un réel donné, appelé le coefficient directeur.
- Les fonctions affines : $f : x \to ax + b$, où a et b sont deux réels donnés. Le nombre b est appelé ordonnée à l'origine.

b- Exploitation graphique

Voici la représentation graphique d'une fonction :
L'axe horizontal s'appelle l'axe des abscisses et l'axe vertical est l'axe des ordonnées.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES



Quelle est l'image de 2002 ? De 0 ? Quels sont les antécédents de 425 ? De 680 ?

Nous allons à présent voir comment tracer une fonction affine (le cas des fonctions linéaires est le même, sauf que $b = 0$). La représentation d'une fonction affine est une droite. Ainsi, il faut deux points pour la tracer.

- ***Le nombre b donne le premier point. Comme son nom l'indique, il s'agit de l'ordonnée à l'origine. Il faut donc placer le point de coordonnées $(0, b)$, soit 0 en abscisse et b en ordonnée.***
- ***On utilise a pour tracer le second point. A partir du premier point, « quand j'avance de 1, je monte de a ». Ainsi, on place le second point, puis on peut tracer la droite déduite par ces deux points.***

Remarque. Lorsque a est petit, le tracé peut alors ne pas être précis. On conseille donc de doubler ou tripler le raisonnement : « quand j'avance de 3, je monte de 3a ». Si a est négatif, « monter de a » signifie en réalité descendre. Ainsi, si a est positif, la droite sera croissante, et s'il est négatif, la droite sera décroissante.