CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Première partie

Les ensembles de nombres

1) Définitions

On définit différents ensembles de nombres :

- *L'ensemble des entiers naturels :*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\ \cdots, \}$$

- *L'ensemble des entiers relatifs :*

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ \cdots, \}$$

- *L'ensemble des nombres décimaux :*

$$\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n}, a \in Z, n \in N\}$$

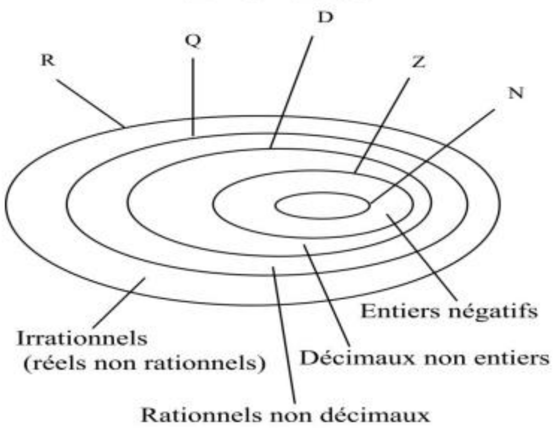
- *L'ensemble des nombres rationnels :*

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$$

- *L'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$, consiste en tous les nombres connus (sauf complexes). Il comprend les nombres rationnels, et les nombres dits irrationnels $\sqrt{2}, \pi$, etc… Ceux qui ne peuvent pas s'écrire comme une fraction).*

Nous avons ainsi :

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$



CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

2) Ecriture décimale

L'écriture décimale d'un nombre est l'écriture de ce nombre en base dix, à l'aide des dix chiffres et d'une virgule, qui sert à indiquer le chiffre des unités du nombre (il est situé à gauche de la virgule). Tous les nombres réels possèdent donc une écriture décimale, qu'ils soient ou non des nombres décimaux. On appelle partie décimale le nombre formé par la partie du nombre située « à droite de la virgule". Les entiers ont une écriture décimale dont la partie décimale est nulle. Nous étudierons plus loin les particularités des écritures décimales, suivant les ensembles de nombres.

Remarque : Attention ! Il ne faut pas confondre :

- Écriture décimale, qui signifie écriture d'un nombre avec des chiffres et une virgule en base 10.
- Nombre décimal qui est un objet mathématique, élément de l'ensemble des décimaux comme défini ci-dessus.
- Partie décimale qui signifie nombre formé par la suite de chiffres située à droite de la virgule.

3) Numération

Nous utilisons une numération dite numération décimale de position. Cela signifie que pour écrire les nombres, nous utilisons 10 symboles seulement, appelés chiffres. C'est la position de ces chiffres dans le nombre qui indique leur valeur, et chaque position est celle d'un groupement par 10 : les unités, les dizaines (10 unités), les centaines (10 dizaines) etc… Un des symboles sert à exprimer l'absence d'unité : c'est le zéro. Nous travaillons en base 10 (c'est-à-dire que nous faisons des groupements en dizaines, puis centaines, puis milliers). Notre système d'écriture des nombres en chiffres utilise 10 symboles différents, et chaque nombre entier possède une unique écriture en chiffres. Ainsi, les opérations implicites (c'est-à-dire invisibles) liées à la juxtaposition des chiffres, sont :

- La multiplication du chiffre par une puissance de dix (selon la place du chiffre dans le nombre).
- Puis l'addition des différents groupements obtenus.

La proposition suivante sera très utilisée pour résoudre des problèmes de numération.

1 : Soit N un entier naturel non nul. Il existe un unique entier n et une suite d'entiers $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tels que :

$$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0.$$

Cette décomposition s'appelle décomposition canonique de N en base 10.
L'entier N s'écrit alors :

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_1 a_0}.$$

La ligne au-dessus des chiffres signifie que l'on ne s'interesse pas au produit des a_i , mais à leur écriture.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Deuxième partie

Arithmétique et divisibilité

1) Multiples et diviseurs

Définition : Soit a un entier et b un entier non nul. On dit que a est multiple de b si l'on peut trouver un entier k tel que :
$a = k \times b.$

On dit aussi que a est divisible par b, que b divise a, ou encore que b est un diviseur de a.
Attention de ne pas se mélanger les pinceaux entre ces différentes notions.

Remarque : On note les choses suivantes :

- Le nombre a est aussi un multiple de k.
- Tout entier est multiple de 1.
- Tout entier est multiple de lui-même.
- 0 est multiple de tout entier.

 # 1 : On se servira souvent des propriétés suivantes :

- Si a et b sont multiples d'un nombre c, alors $a + b, a - b, a \times b$ sont aussi des multiples de c.
- Si a est multiple de b et b est multiple de c, alors a est multiple de c.

2) Division euclidienne

Rappelons le théorème vu dans la leçon N°1 :

Théorème : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers (q, r), tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

Effectuer la division euclidienne, c'est trouver cet unique couple. On dit que a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste dans la division euclidienne.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Cette relation peut se mettre aussi sous la forme :

2 : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Il existe un unique entier q tel que :

$$bq \leq a < b(q+1)$$

Le nombre q de cette proposition est bien le même quotient que celui trouvé dans la première forme de la division euclidienne.

3) Nombres premiers

Parmi tous les nombres entiers, certains ont une propriété que l'on pourrait dire de « non-décomposition », à savoir, que si l'on cherche à les diviser, on ne peut le faire que par eux-mêmes, ou encore, par 1 (puisque nous savons déjà que tous les nombres sont divisibles par 1).

a- Définition

Un entier naturel est premier lorsqu'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples et contre-exemples :

- Le nombre 0 n'est pas premier, car il a une infinite de diviseurs : l'ensemble des nombres entiers !
- Le nombre 1 n'est pas premier : il n'a qu'un diviseur.
- Voici, a titre informatif, la liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$

b- Propriétés

3 : Tout entier naturel non nul, et différent de 1 admet un diviseur premier. Le théorème suivant est historiquement très important, il date de plus de 2000 ans. Une démonstration élémentaire en est donnée par Euclide.

Théorème : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Point méthode : Comment savoir si un nombre est premier ?
Soit N un nombre. On voudrait savoir s'il est premier. Voici la méthode à suivre :

- Calculer $\sqrt{N}$.
- Lister tous les nombre premiers inferieurs à $\sqrt{N}$.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

- ***Regarder si l'un de ces premiers est un diviseur de $\sqrt{N}$.***
- ***Dès qu'on en trouve un, on s'arrête, le nombre n'est pas premier. Si aucun des premiers n'est diviseur de $\sqrt{N}$, alors le nombre N est premier.***

4) Critères de divisibilité

On résume dans ce point les critères les plus connus de divisibilité : Il est important de les connaître par cœur.

Théorème :

- ***Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2.***
- ***Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.***
- ***Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par son chiffre des dizaines et son chiffre des unités est divisible par 4.***
- ***Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 5.***
- ***Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.***

5) PGCD, PPCM

a- PGCD

On se donne deux nombres entiers naturels, m ***et*** n. ***Chercher le*** PGCD ***de*** m ***et*** n***, c'est chercher un nombre qui soit un diviseur de*** m ***et aussi de*** n***, et qui soit le plus grand possible. On sait déjà que parmi l'ensemble des diviseurs, il y a au moins 1. On sait aussi que si les deux nombres*** m ***et*** n ***sont nuls tous les deux, n'importe quel entier serait un diviseur commun, et donc, il n'y en aurait pas de plus grand. Par contre, dès que*** n ***(par exemple) est non nul, il a pour plus grand diviseur, lui-même, et donc notre ensemble de diviseurs communs admettra un plus grand élément.***

Définition : Soient m ***et*** n ***deux entiers, où*** n ***est non nul. Le*** PGCD ***de*** m ***et*** n***, noté*** PGCD(m, n) ***est le plus grand diviseur commun aux nombres*** m ***et*** n***.***

Exemple : Chercher le PGCD de 48 et 72
Pour ce faire, on peut par exemple exhiber tous les diviseurs de chacun des nombres :
L'ensemble des diviseurs de 48 est {1, 2, 4, 6, 8, 12, 24, 48}.
L'ensemble des diviseurs de 72 est {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36}.
Les deux nombres ont beaucoup de diviseurs communs : 1, 2, 4, 6, 8, 12, 24, mais c'est 24 le plus grand.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Ainsi : $24 = \text{PGCD}(48, 72)$.

b- PPCM

On se donne deux nombres, m et n, dont on cherche cette fois les multiples communs : On sait que $m \times n$ en est un. On sait aussi que 0 est un multiple commun à m et n. Nous allons chercher le plus petit de ces multiples, qui soit non nul.

Définition : ***Soient m et n deux entiers, où n est non nul. Le PPCM de m et n, noté PPCM (m, n), est le plus petit multiple commun à m et n, différent de 0.***

Exemple : Chercher le PPCM de 48 et 72.
Pour ce faire, on peut par exemple commencer à exhiber tous les multiples de chacun des nombres :
L'ensemble des multiples de 48 est $\{48, 96, 144, 192, \cdots\}$.
L'ensemble des multiples de 72 est $\{144, 216, 288, \cdots\}$.
Le plus petit multiple commun est 144.
La proposition suivante donne une relation entre PGCD et PPCM.

 # 4 : ***Soient m et n deux entiers non nuls. Alors on a :***

$$m \times n = \text{PGCD}(m, n) \times \text{PPCM}(m, n).$$

c- Nombres premiers entre eux

Définition : ***On dit que deux entiers non nuls m et n sont premiers entre eux lorsque le PGCD de m et n vaut 1.***

Remarque : ***Par la proposition précédente, c'est équivalent à dire que leur PPCM vaut $m \times n$.***

On peut dire de manière équivalente que n est premier à m ou m est premier à n. La théorie des nombres et l'arithmétique a beaucoup intéressé Gauss, qui entre autres, a démontré ce théorème.

Théorème : ***(Théorème de Gauss). Si a divise $b \times c$ et a est premier avec b, alors a divise c.***

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Remarque :

- Lorsqu'on dit a divise b, on peut écrire $a \mid b$. Attention cependant à ne pas confondre avec la barre de fraction.
- On est aussi parfois amené à utiliser la propriété suivante :
- Si un nombre entier N est multiple de deux entiers m et n, et si m et n sont premiers entre eux, alors N est multiple du produit $m \times n$.

Notons que ce n'est plus vrai si m et n ont des diviseurs communs autres que 1 :
Voici un contre-exemple : 36 est multiple de 6 et de 4, (qui possèdent 2 comme diviseur commun), mais 36 n'est pas multiple de $6 \times 4 = 24$.

6) Théorème fondamental de l'arithmétique

a- Le théorème

Nous avons vu que tout nombre strictement supérieur à 1 possédait un diviseur premier. Nous pouvons répéter ce théorème sur le facteur qu'il reste autant de fois que nécessaire. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème : (Théorème fondamental de l'arithmétique)
Tout nombre entier N strictement supérieur à 1 peut se décomposer de manière unique, à l'ordre près, en produit de facteurs premiers.
Expliquons ce théorème : Il nous dit que pour tout entier N superieur ou égal à 2, il existe une famille $p_1,\ldots,p_n$ de nombres premiers, et des entiers $\alpha_n, \cdots, \alpha_n$ tous non nuls, tels que :

$$N = p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \cdots p_n^{\alpha n}.$$

Cette écriture est appelée décomposition en facteurs premiers. Compte-tenu du nom du théorème, cela va de soi qu'il est plutôt important en arithmétique. En réalité, il permet de démontrer la majeure partie des résultats connus, d'où son surnom de « rouleau compresseur ».

Méthode pour calculer la décomposition en facteurs premiers :
Soit un nombre N. On veut sa decomposition en facteurs premiers. On regarde si N est divisible par 2. Si oui, on ecrit 2 et on regarde si $\frac{N}{2}$ est divisible par 2. Sinon on effectue la meme chose avec le nombre premier suivant : 3.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Exemple : Calculer la décomposition en facteurs premiers de 504

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

Ainsi, on a : $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

b- Méthodes de recherche du PGCD et PPCM

La première application de ce théorème est la recherche facile des PGCD et PPCM de deux nombres. On cherche le PGCD de m et n. Notons les deux décompositions :

$$m = p_1^{\alpha_1} 1_2^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \text{ et } n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$$

Où l'on a autorisé temporairement ´ α_i ou β_i à être nul (de manière à faire apparaitre les mêmes nombres premiers dans la décomposition).

Alors :

$$PGCD(m,n) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_n^{\gamma_n} \text{ avec pour tout } i, \gamma_i = min(\alpha_i , \beta_i)$$

De plus

$$PPCM(m,n) = p_1^{\delta_1} \cdots p_n^{\delta_n} \text{ avec pour tout } i, \delta_i = max(\alpha_i , \beta_i)$$

La seconde application est le calcul du nombre de diviseurs d'un nombre n.
On écrit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ **. Alors, le nombre de diviseurs de n est :**

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1).$$

Il existe aussi une autre méthode pour trouver le PGCD, basée sur la division euclidienne.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Troisième partie

Bases et changement de base

1) Problèmes en base 10

Les problèmes rencontrés au concours concernent souvent la recherche d'entiers connaissant certaines de leurs propriétés. On ne pourra alors souvent pas se contenter de poser l'entier en question comme inconnu, il faudra étudier chacun des chiffres de ce nombre, qui deviendront alors nos nouvelles inconnues.

a- Lien entre un nombre et ses chiffres

On rappelle une proposition déjà vue :

 # 1 : Soit N un entier naturel non nul. Il existe un unique entier n et une suite d'entier $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tels que :

$$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0$$

Cette décomposition s'appelle décomposition canonique de N en base 10.
L'entier N s'écrit alors :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_o}$$

b- Méthode générale de résolution d'un problème concernant la recherche d'un nombre entier

1. **Poser les inconnues de manière pratique (le nombre cherché et ses chiffres).**
2. **Traduire le problème par des calculs ou des informations sur le nombre et ses chiffres. Il peut parfois s'agir de faire la liste des nombres possibles.**
3. **Interpréter ces résultats pour trouver les solutions.**

Remarque : Attention à ne pas confondre nombre et chiffre.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

2) Changements de base

Imaginons que nous ne comptions plus en base 10, mais en base b***. Les ordinateurs par exemple, comptent en base 2, certains logiciels sont programmes en base hexadécimale (base 16) etc… Qu'adviendrait-il de nos nombres et de leurs chiffres ?***

a- Changement en base b

Si on doit travailler dans une base b ***au lieu de la base 10, les groupements d'unités dans cette base*** b ***sont de valeur*** b ***(le chiffre le plus à droite désigne les unités, ensuite de droite à gauche, les groupements de*** b ***unités, puis*** $b \times b$ ***unités, puis*** $b \times b \times b$ ***unités etc..). Il faut donc*** b ***symboles différents : 0, 1, 2,*** $\cdots$ ***si*** $b \leq 10$ ***auxquels on ajoutera 10, 11, 12,*** $\cdots$ ***si*** $b \geq 11$***. On appelle encore « chiffres » ces symboles. En base 10, 12 est un nombre de deux chiffres, compose d'une dizaine et de deux unités. Alors qu'en base 15, 12 est un nombre à un chiffre, car on n'a pas encore fait de groupement… En base*** b***, les chiffres sont tous compris entre 0 et*** $b - 1$***.***

 # 2 : ***Un nombre*** N ***s'écrivant en base*** b ***sous la forme*** $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$ ***vaut :***

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0.$$

On peut grâce à cette proposition changer de base et faire des calculs dans une base comme dans l'autre.

b- Décomposition par divisions successives

Rappelons que trouver les symboles composant un nombre N ***dans la base*** b ***est lié au fait de trouver le nombre de paquets de*** b ***que l'on peut faire, dans ce nombre.***
Ainsi, une première méthode consiste à utiliser les divisions successives de N ***par*** b***. On trouve alors les chiffres du nombre de droite à gauche, puisqu'on commence par trouver le chiffre des unités.***
En effet, écrivons la division euclidienne de N ***par*** b ***:*** $N = q_0 b + a_0$ $avec$ $a_0 < b.$
Et donc on peut écrire :

$$N = \overline{(XXXXXXa\_0)_b}$$

Cette égalité traduit le fait que, dans le nombre N***, on a pu faire*** q_0 ***groupements de*** b***, et que*** a_0 ***éléments restent. Ceci nous permettant d'affirmer que*** a_0 ***correspond au coefficient de*** b^0 ***donc*** a_0 ***est le chiffre des unites. Si*** q_0 ***est nul, on s'arrête là. Sinon, dans*** q_{0b} ***, on peut faire au moins*** q_0 ***groupements par*** b***. On va***

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

à nouveau effectuer la division euclidienne de q_0 par b, pour connaître combien de groupements par b peut-on faire dans q_0 : On a alors $q_0 = q_{1^b} + a_1$ $avec$ $a_1 < b$.
Et ainsi, on peut ecrire :

$$N = \overline{(XXXXXa_1a_0)_b}$$

On continue jusqu'à s'arrêter, ce qui sera possible, car la suite des q_n est une suite décroissante de nombres entiers naturels. On aura trouvé le nombre de chiffres dans la décomposition en base b de N, et le chiffre de rang n : a_n.

c- Décomposition par groupements maximaux

Une autre manière de voir le problème du changement de base est de se demander dès le départ la « taille » du plus grand groupement de b qu'il sera possible de faire, dans N. C'est-a-dire, commencer par chercher le nombre de chiffres de N écrit en base b : trouver l'entier n tel que : $b^n \leq N < b^{n+1}$
On effectue alors la division euclidienne de N par b^n: $N = a_n b^n + r_n$ avec $r_n < b^n$.
On réitère l'encadrement, cette fois, en encadrant r_n, puis la division. Cet algorithme prend fin lorsque le reste trouve est tel que $r < b$. On pourra organiser ce travail en créant un tableau de numération, reprenant les puissances de b.

Puissance de 13	13^4	13^3	13^2	13^1	13^0
Valeurs	28561	2197	169	13	1
Groupement Maximum pour 14529	0	6	X	X	X
Groupement maximum pour le reste 1347	0	6	7	X	X
Groupement Maximum pour le reste 164	0	6	7	12	8

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

Quatrième partie

Eléments de didactique

1) En cycle 1

a- Les différents domaines d'apprentissage du socle commun

- Domaine 1 : Mobiliser le langage dans toutes ses dimensions.
- Domaine 2 : Agir, s'exprimer, comprendre à travers les activités physiques.
- Domaine 3 : Agir, s'exprimer, comprendre à travers les activités artistiques.
- Domaine 4 : Construire les premiers outils pour structurer sa pensée.
- Domaine 5 : Explorer le monde.

En cycle 1, nous parlons essentiellement de l'approche du nombre. Il n'y a pas de calculs à proprement parler. En revanche, on traite de problèmes de types additifs ou autres, que l'on résout par une procédure personnelle.

b- Ce qui est attendu des enfants en fin d'école maternelle : domaine 4

B.1 - Utiliser les nombres

- Evaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques.
- Réaliser une collection dont le cardinal est donné. Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités, pour constituer une collection d'une taille donnée ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée.
- Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions.
- Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité.

B.2 - Etudier les nombres

- Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.
- Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

- *Quantifier des collections jusqu'à dix au moins : les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.*
- *Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.*
- *Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.*

c- La pré-numération

Création de collection équipotente : je suis capable de comprendre que lorsque j'ai mis deux collections en miroir et que j'ai pu associer un objet de chacune des collections, alors, il y en a « autant » dans chaque collection.

d- Construction de la notion de nombre

Pour espérer que l'apprentissage du nombre se fasse correctement chez l'élève, il faut prendre en compte un certain nombre de difficultés dans la fonction du dénombrement. Reprenons ici les cinq compétences nécessaires pour dénombrer correctement, d'après R. GELLMAN et C.R. GALLISTEL :

- *Le principe d'adéquation unique : chaque mot énoncé doit être mis en correspondance unique avec un objet de la collection à dénombrer.*
- *Le principe d'ordre stable : les mots nombres doivent être énoncés dans un ordre strict, c'est à dire que la comptine numérique orale doit être maitrisée.*
- *Le principe cardinal : le dernier mot de la suite représente le cardinal de la collection.*
- *Le principe d'abstraction : on peut compter des objets qui n'ont pas de liens particuliers en eux.*
- *Le principe de non-pertinence de l'ordre : l'ordre dans lequel sont pris les différents objets n'a pas d'importance.*

Dans la plupart des classes de maternelle, une bande numérique est affichée. Elle s'arrête parfois au domaine numérique maitrisé par les enfants, mais va parfois bien au-delà. Les calendriers évoqués par les institutions officielles ne sont pas ceux utilisés par les adultes, qui seraient trop complexes. Il s'agit le plus souvent d'un calendrier de la semaine ou du mois en cours, fabriqué avec les élèves. Il sert à mémoriser le nom des jours ou des mois, et l'écriture chiffrée des nombres de 1 à 7 ou de 1 à 31. Ces affichages sont utilisés lors des rituels.

e- Les types de problème

Nous distinguons comme précisé dans les institutions officielles, deux fonctions au nombre :

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

- Le nombre, comme représentation d'une quantité : c'est la fonction cardinale du nombre qui est privilégiée ici. On va amener l'´élève à créer une nouvelle collection ou compléter une collection, équipotente à une collection donnée.
- Le nombre, comme moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets : c'est la fonction ordinale du nombre qui est privilégiée ici. Ce type de problème peut être mis en place à l'occasion de jeux dits « de piste », comme le jeu de l'oie.

	Aspect cardinal	Aspect ordinal
Mémoriser	Garder la mémoire d'une quantité	Garder la mémoire d'une position
Anticiper	Connaître à l'avance le résultat d'une augmentation ou d'une diminution, d'un partage	Connaître à l'avance le résultat d'un déplacement dans une liste rangée

f- Procédures courantes

Reconnaissance du nombre d'objets dans de petites collections, par une perception instantanée (ou subitizing) (reconnaissance directe de « trois » sans nécessairement compter « un, deux, trois »). C'est ce qu'on appelle aussi la reconnaissance globale ou immédiate.
Comparaison de collections à des collections naturelles (par exemple reconnaissance de « cinq » comme quantité qui correspond à celle des doigts de la main) ou à des collections repères (nombre de places autour de la table, constellations du dé, cartes à jouer, dominos…).

g- Erreurs fréquentes

Lors d'un dénombrement, l'élève peut se tromper :

- Dans la suite des nombres :
  - Il se trompe dans l'ordre de la suite
  - Il oublie un nombre
- Dans l'énumération de la collection :
  - Difficulté à élaborer une stratégie de désignation des objets
  - Il est influence par l'aspect de la collection : éparpillée ou non
  - Il oublie un ou plusieurs objets
  - Il désigne plusieurs fois les mêmes.
- Dans la correspondance entre la collection et la suite des nombres :
  - Il dit plus vite les nombres qu'il ne désigne les objets ou le contraire.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

- Il oublie que le nombre d'objets correspond au dernier mot dit. Rappelons aussi qu'un élève peut savoir compter (dire la suite des nombres sans se tromper) sans pour autant savoir dénombrer (dire combien il y en a).

2) En cycle 2

a- Les différents domaines d'apprentissage du socle commun (Cycles 2,3 et 4)

- **Domaine 1** : Les langages pour penser et communiquer.
  Comprendre, s'exprimer en utilisant la langue française à l'oral et à l'écrit
  Comprendre, s'exprimer en utilisant une langue étrangère
  Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques
  Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages des arts et du corps
- **Domaine 2** : Les méthodes et outils pour apprendre.
- **Domaine 3** : La formation de la personne et du citoyen.
- **Domaine 4** : Les systèmes naturels et les systèmes techniques.
- **Domaine 5** : Les représentations du monde et l'activité humaine.

b- Les attendus du programme

La connaissance des nombres entiers et du calcul est un objectif majeur du cycle 2. Elle se développe en appui sur les quantités et les grandeurs, en travaillant selon plusieurs axes.

- Des résolutions de problèmes contextualisés : dénombrer des collections, mesurer des grandeurs, repérer un rang dans une liste, prévoir des résultats d'actions portant sur des collections ou des grandeurs (les comparer, les réunir, les augmenter, les diminuer, les partager en parts égales ou inégales, chercher combien de fois l'une est comprise dans l'autre, etc…). Ces actions portent sur des objets tout d'abord matériels puis évoqués à l'oral ou à l'écrit ; le travail de recherche et de modélisation sur ces problèmes permet d'introduire progressivement les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division).
- L'´étude de relations internes aux nombres : comprendre que le successeur d'un nombre entier c'est « ce nombre plus un », décomposer/recomposer les nombres additivement, multiplicativement, en utilisant les unités de numération (dizaines, centaines, milliers), changer d'unités de numération de référence, comparer, ranger, itérer une suite (+1, +10, +n), etc…
- L'étude des différentes désignations orales et/ou écrites : nom du nombre ; écriture usuelle en chiffres (numération décimale de position) ; double de, moitié de, somme de, produit de ; différence de, quotient et reste de ; écritures en ligne additives/soustractives, multiplicatives, mixtes, en unités de numération, etc…

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

- Une bonne connaissance des nombres inférieurs à mille et de leurs relations est le fondement de la compréhension des nombres entiers, et ce champ numérique est privilégié pour la construction de stratégies de calcul et la résolution des premiers problèmes arithmétiques.

c- Attendus en fin de cycle 2

- Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer.
- Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers.
- Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul.
- Calculer avec des nombres entiers.

d- Repères de progressivité

- CP : L'étude systématique des relations numériques entre des nombres inferieurs à 10, puis à 20 (décomposition/recomposition), est approfondie durant toute l'année. Parallèlement, l'étude de la numération décimale écrite en chiffres (dizaines, unités simples) pour les nombres jusqu'à 100 et celle de la désignation orale, permet aux élèves de dénombrer et constituer des collections de plus en plus importantes (la complexité de la numération) orale en France doit être prise en compte pour les nombres supérieur à 69).
- CE 1 : Un temps conséquent est consacré à la reprise de l'étude des nombres jusqu'à 100, notamment pour leur désignation orale et pour les stratégies de calcul mental ou écrit. Parallèlement, l'étude de la numération décimale écrite (centaines, dizaines, unités simples) est étendue par paliers, jusqu'à 200, puis 600 et éventuellement 1000.
- CE 2 : Jusqu'à 10000 (l'absence de mot spécifique pour désigner le groupement suivant correspondant à 10000 justifie ce palier).

3) En cycle 3

a- Les attendus du programme

Au cycle 3, l'étude des grands nombres permet d'enrichir la compréhension de notre système de numération (numération orale et numération écrite) et de mobiliser ses propriétés lors de calculs. Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes…
Les caractéristiques communes entre le système de numération et le système métrique sont mises en évidence. L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers) et de calcul.
Le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté sont à construire en interaction [...] Les problèmes arithmétiques proposés au cycle 3 permettent d'enrichir le sens des opérations déjà abordées au cycle 2 et d'en étudier de nouvelles. Les procédures de traitement de ces problèmes peuvent évoluer en fonction des nombres en jeu et de leur structure. Le calcul contribuant aussi à la représentation des problèmes, il s'agit de développer simultanément chez les élèves des aptitudes de calcul.

b- Les attendus en fin de cycle 3

- Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux.
- Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux.
- Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

c- Repères de progressivité

- **Fractions et décimaux**

Les fractions sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux. Pour cette raison, on commence dès le CM1 l'étude des fractions simples (comme 2/3, 1/4, 5/2) et des fractions décimales. Du CM1 `a la 6e, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en 6ème. Pour les nombres décimaux, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle pour s'étendre aux dix-millièmes en 6ème.

- **Le calcul**

La pratique du calcul mental s'étend progressivement des nombres entiers aux nombres décimaux, et les procédures à mobiliser se complexifient.

- **La résolution de problèmes**

La progressivité sur la résolution de problèmes, outre la structure mathématique du problème, repose notamment sur :

- Les nombres mis en jeu : entiers (tout au long du cycle) puis décimaux.
- Le nombre d'étapes de calcul et la détermination ou non de ces étapes par les élèves selon les cas, à tous les niveaux du cycle 3, on passe de problèmes dont la solution engage une démarche à une ou plusieurs étapes indiquées dans l'énonce à des problèmes, en 6ème nécessitant l'organisation de données multiples ou la constitution d'une démarche.
- Les supports envisagés pour la prise d'informations : la collecte des informations utiles peut se faire à partir d'un support unique en CM1 (texte ou tableau ou représentation graphiques aux numérations écrites et orales) puis à partir de deux supports complémentaires pour aller vers des tâches complexes mêlant plusieurs supports en 6ème.

CALCULS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES

d- Problèmes liés aux numérations écrites et orales

En cycle 2, Les élèves doivent aussi savoir lire un nombre écrit en chiffres, et réciproquement, écrire un nombre dit. Les programmes préconisent la résolution de problèmes se situant dans un domaine numérique « relativement étendu » dès le début du cycle, c'est-`a-dire jusqu'à 20 ou 30, sans pour autant que les élèves sachent écrire tous ces nombres en chiffres. Quand il s'agit d'étudier la signification de la valeur d'un chiffre en fonction de sa position dans le nombre, les programmes précisent que l'on peut étudier ensemble tous les nombres à 2 chiffres, c'est-`a-dire la décomposition en dizaines et unités. L'apprentissage des nombres, allant de 20 à 59, pose en général peu de problèmes quand les élèves ont déjà travaillé les groupements en dizaines et s'appuient sur la connaissance des mots « vingt, trente, quarante, cinquante ». Il leur faut ensuite, pour la fin du CP, étudier la « famille des soixante » de 60 à 79, puis enfin la « famille des 80 », de 80 à 99. A partir de 100, la suite est très régulière. Les programmes indiquent aussi que l'écriture littérale (en lettres) des nombres doit être introduite très progressivement, et seulement quand les écritures chiffrées sont bien maitrisées oralement. C'est à travers la résolution de problèmes que les élèves prennent conscience de l'utilité des nombres. Il leur faut ensuite construire leurs connaissances de notre numération. Le point le plus important est la « capacité à connaître la valeur d'un chiffre en fonction de sa position dans l'écriture d'un nombre ». L'élève doit comprendre ici que notre système de numération est un système de numération de position, en base 10. Une bonne compréhension de notre système de numération est indispensable à la maîtrise du calcul. Le calcul mental prendra une place importante au sein des activités, notamment en ce qui concerne les relations additives et multiplicatives entre les nombres. Le calcul réfléchi aura une place significative. La calculatrice aura sa place pour permettre la résolution de problèmes où la stratégie, la méthode ou la réflexion sont privilégiées. Elles permettront de réaliser des calculs que les élèves ne savent pas faire à la main.

En cycle 3, les nombres jusqu'au milliard seront utilisés. Les procédures et les types de problèmes seront identiques à ceux du cycle 2. Les difficultés particulières liées à ces nombres tiendront à leur longueur, et la présence de zéros dans l'écriture de ces nombres qui rendront leur lecture ou leur écriture plus complexe. Le nombre de chiffres peut également complexifier les tâches de comparaison.
Les principales erreurs que l'on pourra relever portent sur l'identification des groupements (dizaines de milliers, million, milliard), et sur la gestion (lecture ou écriture) des zéros dans l'´écriture chiffrée des nombres.

e- Comparaison de nombres entiers

Le nombre de chiffres qui composent le nombre est le premier indicateur à observer. Si les nombres à comparer possèdent autant de chiffres, il faudra alors les comparer chiffre à chiffre en commençant à gauche, c'est-`a-dire par le rang d'unités le plus élevé. Les problèmes de rangement des nombres, par ordre croissant ou décroissant, demanderont en plus aux élèves d'élaborer une stratégie pour gérer la liste des nombres proposés. Les élèves seront aussi confrontés aux problèmes d'intercalation (placer un nombre entre deux autres), et d'encadrement (encadrer un nombre par deux autres).