LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Première partie

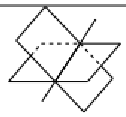
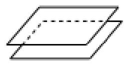
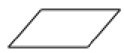
Droites et plans dans l'espace

Les objets de l'espace sont les points et les droites, comme en géométrie plane, auxquels s'ajoutent les plans. Nous allons donc étudier les positions relatives de ces différents objets géométriques.

1 : ***Un plan est entièrement défini par la donnée de trois points distincts deux à deux et non alignés.***

1) Position relative de deux plans

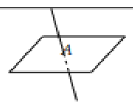
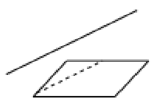
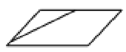
Soient P et P' deux plans de l'espace. Il y a trois manières de voir comment se comportent P et P' l'un par rapport à l'autre :

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles	
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus
		
$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$, une droite	$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$	$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{P}$

2 : ***Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer qu'ils appartiennent tous les trois à deux plans distincts.***

2) Position relative d'un plan et d'une droite

Soit D une droite quelconque de l'espace et soit P un plan de l'espace. Rappelons ici que chercher l'intersection de deux ensembles de points, c'est chercher tous les points qui sont dans les deux ensembles à la fois.

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles	
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles	$\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$
		
$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{A\}$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}$

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

3) Position relative de deux droites

Soient D et D' deux droites de l'espace. Il y a quatre positions relatives possibles entre ces deux droites :

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires		
	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues
$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{A\}$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \mathcal{D}$

Remarque : On peut remarquer ici une grande différence d'avec la géométrie plane : Deux droites peuvent ne pas avoir de point commun et cependant, ne pas être parallèles.

4) Détermination de droites et de plans

3 : Pour déterminer un plan, on peut se donner :

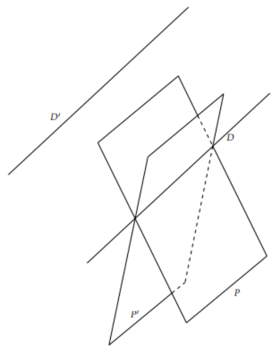
- Soit une droite et un point n'appartenant pas à la droite ;
- Soit deux droites sécantes ;
- Soit deux droites parallèles strictement.

4 : Pour déterminer une droite de l'espace, il suffit de deux points distincts. La dernière proposition détermine des positions de parallélisme particulières.

5 :

- Par un point donné, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.
- Tout plan contenant deux points distincts d'une droite, la contient toute entière.
- (Théorème du toit) Si une droite D est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

Illustration du théorème du toit :



LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

5) Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

a- Parallélisme

 # 6 :

- **Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il suffit qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.**
- **Pour que deux plans soient parallèles, il suffit que deux droites sécantes d'un des plans soient parallèles à l'autre plan.**
- **Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les deux droites d'intersection obtenues sont parallèles.**

b- Orthogonalité

Définition : **Deux droites dans l'espace sont dites orthogonales lorsque les parallèles respectives à ces droites, menées par un point quelconque de l'espace, définissent un plan dans lequel elles sont perpendiculaires.**

Remarque : **Attention ! Deux droites peuvent être orthogonales dans l'espace, sans être perpendiculaires.**

Définition : **Une droite est dite orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.**

 # 7 :

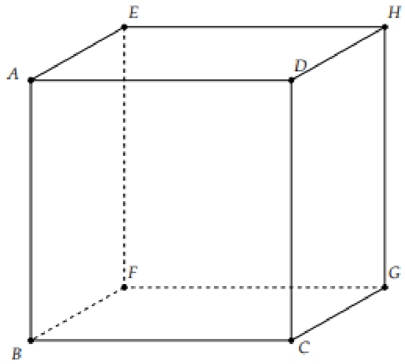
Si une droite D est orthogonale à un plan P, elle est orthogonale à toute droite du plan P.
Quel que soit le point A de l'espace et un plan P, il existe une unique droite D passant par A et orthogonale au plan P.
Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

Remarque : **Attention ! Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles. Mais, deux plans orthogonaux peuvent contenir des droites qui ne sont pas orthogonales !**

Exemple : Illustrons ces différentes propriétés à l'aide d'une figure de référence : le cube $ABCDEFGH$ représenté ici :

1. Citer deux plans parallèles ;
2. Citer deux plans orthogonaux ;
3. Citer deux droites parallèles ;
4. Citer une droite orthogonale à un plan ;
5. Citer deux droites orthogonales mais non perpendiculaires ;
6. Citer, dans deux plans orthogonaux, deux droites qui ne sont pas orthogonales (qui sont parallèles, par exemple).

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE



Eléments de réponses possibles :

1. ***Les plans $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles ; on peut aussi citer les plans latéraux : $AEFB$ et $DHGC$ sont parallèles.***
2. ***Les plans $ABCD$ et $BFGC$ sont orthogonaux ; la droite (BC) est l'intersection de ces deux plans.***
3. ***Les droites (BC), (AD), (EH) et (FG) sont parallèles ; de même, les droites (AE), (DH), (BF) et (GC) sont parallèles.***
4. ***La droite (EH) est orthogonale au plan $AEFB$; ou encore, la droite (AB) est orthogonale au plan $AEHD$.***
5. ***La droite (AB) est orthogonale au plan $AEHD$, elle est donc orthogonale a toute droite de ce plan : elle est orthogonale à la droite (EH). Cependant, Les deux droites (AB) et (EH) sont dans deux plans parallèles : $(AB) \subseteq ABCD$ et $(EH) \subseteq EHGF$. Ces deux droites ne sont donc pas sécantes (et en particulier, ne peuvent donc être perpendiculaires). Ainsi donc, les droites (AB) et (EH) sont orthogonales et non perpendiculaires.***
6. ***Les plans $ABCD$ et $BFGC$ sont orthogonaux, $(BC) \subseteq ABCD$ et $(FG) \subseteq BFGC$. Et les deux droites (BC) et (FG) sont parallèles.***

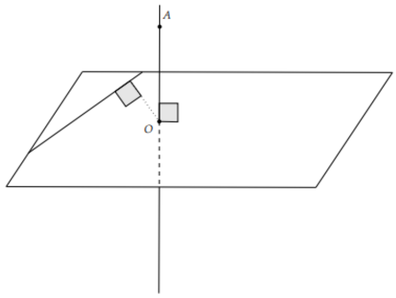
 # 14 :

Point Méthode : Pour montrer que deux droites de l'espace sont parallèles, on peut :

- ***Soit montrer qu'elles sont parallèles à une même troisième ;***
- ***Soit montrer qu'elles sont orthogonales à un même plan ;***
- ***Soit trouver un plan de l'espace qui les contient toutes les deux, et dans lequel elles sont parallèles. On utilise alors les techniques de géométrie plane.***

Leçon de mathématique

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE



LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Deuxième partie

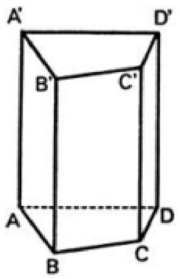
Des solides particuliers

Dans l'espace comme dans le plan, certains solides ne peuvent être associés à un objet mathématique connu, comme la patate, par exemple. Nous proposons ici quelques solides particuliers.

1) Les polyèdres

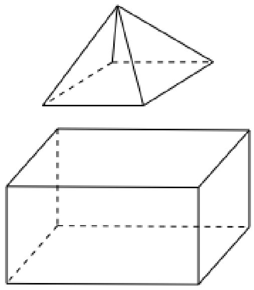
Définition : ***Un polyèdre est un solide de l'espace délimité par des faces planes qui sont des polygones. Voici quelques exemples de polyèdres :***

- ***Le prisme droit*** ***est un solide constitue de deux faces polygonales superposables (triangle, rectangle, parallélogramme…) appelées bases du prisme. Les autres faces sont des rectangles. Les deux bases du prisme sont dans deux plans parallèles.***



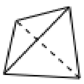
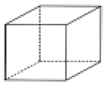
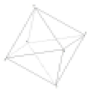
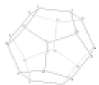
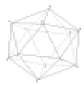
- ***La pyramide*** ***est un solide constitue d'une face polygonale, appelée base, et d'un point, S, situe hors du plan de base, tel que toutes les autres faces de la pyramide sont des triangles, de sommet S et ayant pour côtés opposés à S, un côté du polygone de base. La droite passant par S et perpendiculaire au plan de base est appelee hauteur de la pyramide. Cas particulier : une pyramide de base triangulaire est un tétraèdre.***
- ***Le parallélépipède rectangle (ou pavé droit)*** ***est un solide dont toutes les faces sont des rectangles. Un pave droit particulier est le cube, dont toutes les faces sont des carrés.***

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE



2) Les solides de Platon

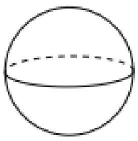
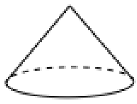
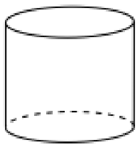
Définition : *On dit qu'un polyèdre est régulier et convexe si tous ses sommets sont sur une même sphère, et que toutes ses faces sont les mêmes polygones réguliers convexes. Un solide de Platon est un polyèdre régulier convexe. Il a été démontré qu'il n'en existe que cinq !*

Le tétraèdre régulier	Le cube	L'octaèdre	Le dodécaèdre	L'icosaèdre
4 faces : triangles équilatéraux	6 faces : carrés	8 faces : triangles équilatéraux	12 faces : pentagones réguliers	20 faces : triangles équilatéraux
				

3) D'autres solides

Voici quelques solides connus qui ne sont pas des polyèdres :

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

La sphère	Le cône	Le cylindre de révolution
Ensemble des points de l'espace situés à une distance constante, appelée rayon, d'un point fixe, appelé centre de la sphère.	Il possède un sommet, une hauteur et une base : un cercle.	Il a une hauteur, et il a pour base un cercle.
		

4) Représenter les solides

Nous proposons ici deux manières de représenter les solides : Commençons par rappeler la définition didactique de cette représentation :

Définition :
Représenter un objet, c'est traduire à l'aide de procédés plus ou moins conventionnels, certaines propriétés géométriques d'un objet géométrique. Toute représentation ne permet pas de mettre en évidence toutes les propriétés ; il faut en négliger certaines. Toute représentation est déformante, mutilante : on perd, en représentant, certaines informations. Il y a plusieurs représentations d'un même objet (en perspective cavalière, perspective axonométrique, etc., vue de dessus, etc.). La représentation utilisée dépend du problème que l'on se pose et des caractéristiques de l'objet dont on a besoin. Les activités de représentation permettent de mettre en évidence les propriétés des objets géométriques, mais aussi de prendre en compte différents points de vue de l'objet considéré.

Il est donc intéressant d'habituer les élèves à effectuer et à utiliser des représentations différentes d'un même objet et donc à savoir choisir la représentation de l'objet qui convient le mieux à la résolution en cours.

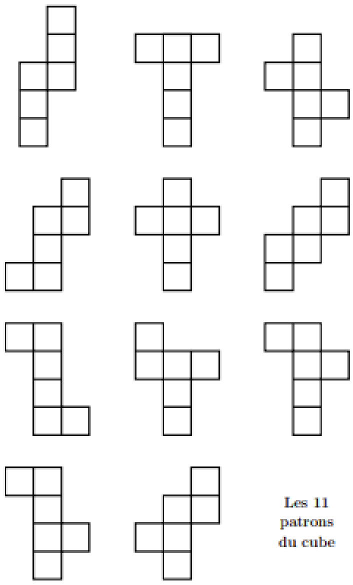
a- Patrons

Il s'agit ici de représenter le solide sur feuille plane, de telle manière qu'après découpage (éventuel), on puisse reconstituer le solide en trois dimensions.

Définition : Le patron d'un polyèdre est constitué de tous les polygones servant à la construction de ce polyèdre par pliages. Chaque pièce est alors un polygone dans lequel toutes les longueurs et tous les

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

angles sont en vraie grandeur. Il n'y a pas une façon unique de produire le patron d'un polyèdre connu. Par exemple, le cube dispose de 11 patrons différents
(Source du dessin : APMEP)



On ne peut dessiner le patron d'une sphère (d'où la difficulté à établir un Atlas, représentation plane d'une sphère bien connue : la Terre).

#1 : Le patron d'un cylindre ou d'un cône est constitué des surfaces planes du solide et du développement plan des surfaces latérales.

b- La perspective cavalière

La perspective cavalière est un mode de représentation d'objets de l'espace sur une figure plane. Il faut bien comprendre qu'en deux dimensions, on ne peut faire apparaître toutes les propriétés des objets de l'espace et c'est pourquoi on utilise ce mode de représentation, qui nous permet de lire certaines propriétés de l'objet de l'espace.

Définition : On appelle plan frontal, tout plan du solide vu de face. On appelle ligne de fuite, toute droite perpendiculaire aux plans frontaux.

#2 : Propriétés d'une représentation en perspective cavalière :

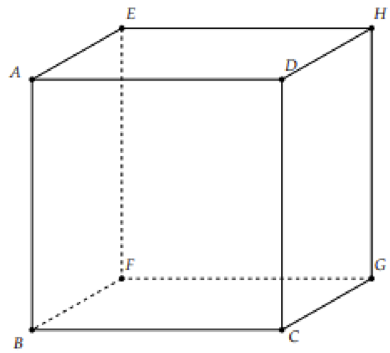
LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

- ***Les figures situées dans le plan frontal sont représentées en vraie grandeur, leurs angles et leurs longueurs sont ainsi conservés.***
- ***Des droites parallèles du solide sont représentées par des droites parallèles et en particulier, les lignes de fuite sont parallèles entre elles et font, avec les horizontales du plan frontal, un angle apparent constant, nommé angle de fuite.***
- ***Il y a conservation des rapports de longueurs de segments parallèles et en particulier, les milieux des segments sont conservés, quelle que soit la position du segment dans l'espace.***
- ***Les segments parallèles à la ligne de fuite sont représentés de manière réduite, selon un rapport $k < 1$, qui peut être précisé.***

Exemple : Représenter un cube ABCDEFGH d'arête 6 cm en perspective cavalière d'angle de fuite 30° et de rapport $\frac{2}{3}$.

Explicitons la construction que l'on va mener :

1. ***On choisit le plan frontal : Ici, le carré $ABCD$ est dans le plan frontal. On construit donc un carré, en vraie grandeur, de côté 6 cm.***
2. ***La droite (CG) est orthogonale au plan $(ABCD)$, elle doit donc faire un angle de 30 avec la droite (BC) qui est une horizontale.***



3. ***Le segment $[CG]$ étant sur la ligne de fuite, sa longueur sur la perspective est représentée par un segment de longueur $\frac{2}{3}$ de 6 cm, soit ici, 4 cm.***
4. ***On peut donc maintenant placer les points G et H, puisque les parallèles se conservent, on a $DCGH$ qui est représentée ici par un parallélogramme (et $DH = CG = 4$ cm ; $DC = HG = 6$ cm).***
5. ***De même, on complète la représentation de $ADHE$, qui est représentée par un parallélogramme.***
6. ***Enfin, reste à construire le point F, situe « derrière » le plan de face, et donc, les traits des segments $[BF]$; $[GF]$ et $[EF]$ sont représentés en pointillés.***

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Troisième partie

Eléments de didactique

1) En cycle 2

Attendus de fin de cycle 2	Repères de progressivité
Reconnaître, nommer, décrire, reproduire quelques solides.	
Reconnaître et trier les solides usuels parmi des solides varies. Décrire et comparer des solides en utilisant le vocabulaire approprie. Reproduire des solides. Fabriquer un cube à partir d'un patron fourni. Vocabulaire approprié pour : nommer des solides (boule, cylindre, cône, cube, pave droit, pyramide), décrire des polyèdres (face, sommet, arête), les faces d'un cube sont des carrés, les faces d'un pavé droit sont des rectangles (qui peuvent être des carrés).	Dès le CP, les élèves observent et apprennent à reconnaître, trier et nommer des solides varies. Le vocabulaire nécessaire pour les décrire (face, sommet, arête) est progressivement exigible. Ils apprennent dès le CE1 à construire un cube avec des carres ou avec des tiges que l'on peut assembler. Au CE2, ils approchent la notion de patron du cube. La discussion sur l'agencement des faces d'un patron relève du cycle 3.

2) En cycle 3

Attendus de fin de cycle 2	Repères de progressivité
(Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou élaborant des représentations	
Divers modes de représentations dans l'espace	
Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides (et figures géométriques	
Reconnaître, nommer, comparer, vérifier, décrire des solides simples ou des assemblages de solides simples à partir de certaines de leurs propriétés. Vocabulaire approprie pour nommer les solides : pavé droit, cube, prisme droit, pyramide régulière, cylindre, cône, boule. Reproduire, représenter, construire : des solides simples ou des assemblages de solides simples sous forme de maquettes ou de dessins ou à partir d'un patron (donné, dans le cas d'un prisme ou d'une pyramide, ou à construire dans le cas d'un pavé droit).