TRANSFORMATIONS PLANES

Première partie

Généralités

1) Définition

On appelle transformation plane, toute application bijective du plan dans lui-même.

Cekoiça ? Cela signifie que :

- *Comme toute application, elle associe à chaque point du plan un unique point du plan.*
- *De plus, elle est bijective, donc, par définition, tout point du plan est l'image d'un unique point du plan.*

Si un point M a pour image M' par une transformation f , on dit que M est l'antécédent du point M' par la transformation f.

Voici quelques exemples que nous allons étudier :

- *L'identité*
- *La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$*
- *La rotation de centre O et d'angle α*
- *La symétrie d'axe D*
- *L'homothétie de centre O et de rapport $k, k \neq 0$.*

Un point M du plan est dit invariant par une transformation f si son image par f est lui-même. Autrement dit, c'est un point qui n'est pas modifié par la transformation. On a donc : M est invariant par f lorsque $f(M) = M$.

2) Vecteurs

Nous verrons dans un prochain chapitre cette notion plus en détail. Notion mathématique, qui d'ailleurs est assez complexe mais ici elle ne nous servira que pour simplifier des écritures, un peu lourdes sans cela. Nous allons tacher de l'expliquer de façon simpliste, en partant de notions plus connues.

a- Au secours, je n'aime pas les vecteurs !

Soient A et B deux points distincts du plan. Lorsque l'on parle du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on s'intéresse à trois choses :

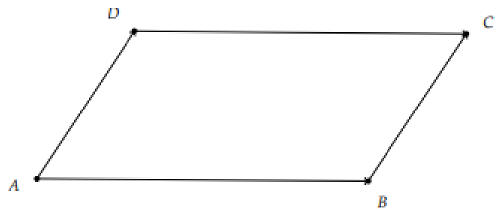
TRANSFORMATIONS PLANES

- *Sa longueur, qui correspond à la longueur du segment $[AB]$.*
- *Sa direction : tout segment parallèle à la droite (AB) a la même direction que le vecteur, et un segment non parallèle à (AB) n'a pas même direction que $\overrightarrow{AB}$.*
- *Son sens : on regarde le segment de A vers B. On dit aussi que A est l'origine et B l'extrémité du segment.*

Lorsque $A = B$, on définit le vecteur nul, noté $\vec{0}$. Il a une longueur, à savoir zéro, mais on ne peut pas lui donner de direction, ni de sens.

b- Vecteurs et parallélogramme

On peut lier cette notion de vecteur avec le parallélogramme, car si $ABCD$ est un parallélogramme, $[AB]$ et $[DC]$ ont même longueur, les droites (AB) et (DC) sont parallèles et enfin, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont le même sens. On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. Sur les figures, un vecteur est représenté par une flèche dont l'origine est celle du vecteur, et la pointe est l'extrémité du vecteur.



***#3 :** Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux, alors $ABCD$ est un parallelogramme. Réciproquement, si $ABCD$ est un parallélogramme, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.*

***Remarque :** Attention à l'ordre des points : il est différent dans la façon de nommer le parallélogramme et dans la façon dont on l'utilise dans l'écriture de l'égalité de vecteurs.*

TRANSFORMATIONS PLANES

Deuxième partie

Les transformations planes

Nous allons dans cette section, décrire les principales transformations planes qui existent. Rappelons que nous considérons toutes notre leçon dans le plan P.

1) L'identité

Définition : *L'identité du plan est l'application qui à chaque point du plan associe lui-même. Tout point du plan est alors invariant. On peut donc la définir comme ceci :*

$$\begin{aligned} Id : P &\rightarrow P \\ M &\rightarrow M \end{aligned}$$

2) La symétrie d'axe D

a- Définition

On appelle symétrie d'axe D, appelée aussi réflexion d'axe D, notée s_d la transformation du plan dans lui-même qui associe, à chaque point M du plan, une image notée M' ou $s_d\,(M)$ telle que :

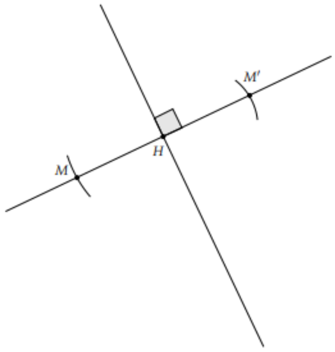
- *Si M est sur D, l'image de M par sd est lui-m^eme (on dit que M est invariant par la symétrie) : $M' = M$.*
- *Si M est point du plan extérieur à D, M' est tel que la droite D est la médiatrice du segment $[MM']$.*

b- Construction

Il y a deux methodes possibles :

1. *Première méthode, avec une règle, une équerre et un compas. Soient un point M qui n'est pas sur D, et son symétrique, noté M':*
   - *Construire la perpendiculaire, notée D', à D, passant par M.*
   - *Nommer H le point d'intersection de D' et de D.*
   - *Tracer le cercle de centre H passant par M. Il recoupe D'en M'.*

TRANSFORMATIONS PLANES



Cette construction utilise la définition de la médiatrice d'un segment comme la droite perpendiculaire à un segment et le coupant en son milieu.

2. **Seconde (et plus belle !) méthode, seulement avec un compas.**
   - **Placer deux points quelconques I et J distincts sur la droite D.**
   - **Tracer les cercles de centre I et de centre J, passant par M.**
   - **M' est le second point d'intersection de ces cercles, le premier étant M.**

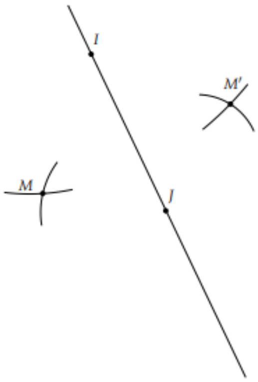
Cette seconde construction utilise l'autre définition d'une médiatrice, comme ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment. Ici, la médiatrice de $[MM']$ est la droite (IJ). On a $IM = IM'$ donc M' est sur le cercle de centre I passant par M. De même, M' est sur le cercle de centre J de passant par M. C'est bien la construction effectuée. Notons que les deux cercles n'ont en général pas le même rayon.

3) La rotation de centre r et d'angle α

a- Discussion et définition

Abordons naïvement la rotation en lien avec la notion d'angle. Considérons dans le plan, un cercle de centre O et de rayon 1 et choisissons un point A quelconque sur le cercle. Si l'on souhaite placer le point A', image de A par la rotation de centre O et de mesure d'angle α, on se trouve confronte à un choix, car deux points répondent à notre demande. Pour répondre à ce problème, les mathématiciens décident alors d'orienter le plan, c'est-à-dire de décider d'un sens positif de parcours du cercle. Par convention, on dit que l'on tourne dans le sens positif, et on considère alors des mesures d'angles positives, lorsque l'on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (ce sens est appelé sens trigonométrique, sens direct, ou sens anti-horaire). Si la mesure d'angle est négative, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, donc. On parle dans ce cas, d'angles orientes et c'est ce que nous allons utiliser dans la suite du paragraphe.

TRANSFORMATIONS PLANES



Définition : La rotation de centre O et d'angle α, $\alpha \in R$, notée $r\ (O, \alpha)$ est la transformation du plan telle que :

- L'image du point O est lui-même (il est invariant).
- Si M est distinct de O, son image M' est sur le cercle de centre O et de rayon OM et l'angle $\widehat{MOM'}$ est de mesure α (calculée de M vers M' dans le sens du signe de α, c'est-`a-dire positif si α est positif, et n´egatif si α est n´egatif).

b- Construction

On reporte la mesure de l'angle α sur le cercle de centre O, de rayon OM, soit à l'aide d'un rapporteur, soit d'un gabarit, ou on le construit à la règle et au compas s'il s'agit d'un angle de 90◦, 45◦, 60◦, 30◦.

c- Un cas particulier intéressant : la symétrie centrale

Définition : La symétrie de centre O est la rotation de centre O et de mesure d'angle 180◦.

Les points M, O, M' sont donc alignes. Comme de plus, $OM = OM'$, le point O est le milieu du segment $[MM']$. On retrouve le fait que construire l'image M' de M (dans le cas où $M \neq O$) par la symétrie de centre O c'est placer le point M' du plan tel que O soit milieu du segment $[MM']$. Trouvez une manière simple de construire M'.

4) La translation de vecteurs $\overrightarrow{AB}$

a- Définition

On dit que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ lorsque M' est tel que :

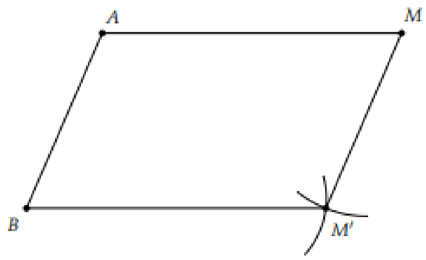
TRANSFORMATIONS PLANES

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

Ou encore lorsque le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme.

b- Construction

On trace le cercle de centre M et de rayon AB ainsi que celui de centre B et de rayon AM. Ces deux cercles se coupent en deux points. Seul un des deux points permet de tracer un quadrilatère non croisé. C'est le point ´ M'recherche.



5) L'homothétie de centre O et de rapport k

a- Définition

Soit O un point du plan, et k un réel strictement positif. On définit l'homothétie de centre O et de rapport k, notée $h\ (O, k)$, par l'image de chacun des points du plan :

- *L'image de O par l'homothétie de centre O et de rapport k est O.*
- *L'image M' d'un point M du plan, distinct de O par l'homothétie est telle que : M' est sur la demi-droite $[OM)$ et $OM' = k \times OM$*

On peut (et c'est préférable !) résumer ces deux conditions par :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

b- Construction

La construction n'est pas toujours possible « à la règle non graduée et au compas ». Mais dans le cas des entiers, entre autres, on peut le faire. Trouvez une construction originale, utilisant le théorème de Thalès…

TRANSFORMATIONS PLANES

Troisième partie

Propriétés

Dans toute la section, on introduira trois points A, B et C, et leurs images seront notées respectivement A', B' et C' par la transformation considérée.

1) Conservation des longueurs

Théorème : **Si la transformation que l'on considère est l'identité, ou une rotation, ou une symétrie axiale, ou une translation, alors la distance $A'B'$ est égale à la distance AB. On dit que ces transformations sont des isométries. Si la transformation est une homothétie de rapport $k, (k > 0)$ alors $A'B' = k \times AB$.**

2) Conservation des mesures d'angles

On s'intéresse à l'angle défini par $[AB]$ et $[AC]$, noté $\widehat{BAC}$ et à celui défini par leurs images, noté $\widehat{B'A'C'}$.

Théorème : **Les mesures des angles géométriques $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont égales, par toute transformation telle que l'identité, ou une rotation, ou une translation, ou une homothétie. De plus les angles des images sont orientés de la même manï ere que les angles d'origine.**
Par une symétrie axiale, l'angle géométrique $\widehat{B'A'C'}$ a la m^eme mesure que l'angle $\widehat{BAC}$, mais l'angle orienté qui lui correspond est transformé en son opposé.

3) Transformations réciproques

Lorsque l'on connaît un point M et la transformation, on sait construire l'image M' de M comme explique plus haut dans ce cours. On se pose ici le problème inverse. Comme nous parlons de transformations, nous savons que nos applications sont bijectives, et donc, nous sommes assurés que si l'on se donne une transformation du plan et un point M', il est l'image d'un point M du plan, inconnu. Comment retrouver M ? Et mieux, par quelle transformation « nouvelle » du plan passe-t-on de M' à M ? C'est cette transformation qui se nomme transformation réciproque.

Théorème :

- **La transformation réciproque de l'identité est elle-même.**
- **La transformation réciproque de la rotation de centre O et d'angle α est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$.**

TRANSFORMATIONS PLANES

- La transformation réciproque de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la translation de vecteur $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- La transformation réciproque de la symétrie axiale est elle-même.
- La transformation réciproque de l'homothétie de centre O et de rapport k $(k > 0)$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.

4) Conséquence sur l'image d'une figure plane

Nous savons donc tracer images ou antécédents par les transformations proposées ici. Il reste désormais à tracer l'image d'une figure, et de voir quelles sont les caractéristiques des figures qui sont conservées : Grâce aux différentes propriétés qui ont été étudiées, nous sommes maintenant capables de construire l'image d'une figure plane par les transformations que nous avons citées. Notons T cet ensemble des transformations : l'ensemble des rotations, translations, symétries axiales et homothéties.

a- Image d'une droite

Théorème :
- L'image d'une droite par une des transformations de T est une droite.
- L'image d'un couple de droites parallèles est encore un couple de droites parallèles.
- L'image d'un couple de deux droites perpendiculaires est encore un couple de droites perpendiculaires.

b- Image d'un cercle

Soit un cercle de centre O et de rayon R.

Théorème : Par une transformation $t \in T$, l'image d'un cercle de centre O, de rayon R est encore un cercle, de centre, O', image de O par t, et de rayon :
- R, si la transformation est une isométrie,
- kR, dans le cas où la transformation t est une homothétie de rapport k.

c- Image d'un segment $[AB]$

Théorème : L'image d'un segment $[AB]$ est encore un segment, d'extrémités A' et B', images respectives de A et B par la transformation.
- La longueur du segment $[A'B']$ est :
  - AB, dans le cas où t est une isométrie.
  - $k \times AB$ dans le cas d'une homoth´etie de rapport k.
- [A'B'] est un segment :

- ***Parallèle à $[AB]$ dans le cas où la transformation est une translation ou une homothétie.***
- ***Tel que l'angle formé par les deux segments soit de mesure α dans le cas d'une rotation d'angle α.***
- ***Tel que l'axe de la symétrie soit bissectrice de l'angle formé par les deux segments (si le segment $[AB]$ est parallèle à l'axe D, $[A'B']$ sera aussi parallèle à D).***

d- Parlons périmètre et aire

Le périmètre, l'aire et le volume d'une figure sont conservés par transformation dans le cas ou la transformation est une isométrie.
Dans le cas d'une homothétie de rapport k, le périmètre de la figure est multiplié par k et l'aire de la figure est multipliée par k^2.

TRANSFORMATIONS PLANES

Quatrième partie

Triangles isométriques, triangles semblables

1) Triangles isométriques

Définition : Deux triangles sont dits isométriques si on peut trouver une isométrie du plan telle que l'un soit l'image de l'autre par celle-ci.

Remarque :
- Si, après avoir effectué une rotation, ou une translation, ou une symétrie axiale, le premier triangle est l'image du second, alors les triangles sont isométriques.
- En maths, le « ou » n'est pas exclusif. C'est-à-dire que l'on peut avoir à effectuer, tout d'abord, une translation, puis, une rotation, pour obtenir le second triangle.
- Du fait des propriétés vues ici, on retrouve bien la définition intuitive vue dans la partie précédente, à savoir que deux triangles sont iso m'étriques si on peut les superposer.

Théorème : Deux triangles sont isométriques si et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée :
- Leurs côtés sont deux à deux égaux (les côtés du premier sont égaux à ceux du deuxième).
- Ils ont un côté de même longueur et les deux angles adjacents à ce côté sont égaux.
- Ils ont deux côtés deux à deux égaux, et l'angle formé par ces deux côtés, égal.

2) Triangles semblables

Définition : Deux triangles sont dits semblables si on peut trouver une transformation du plan, composée d'une isométrie du plan et d'une homothétie, telle que l'un soit l'image de l'autre par celle-ci.

#1 : Si, après avoir effectué une rotation, ou une translation, ou une symétrie axiale, puis une homothétie, le premier triangle est l'image du second, alors les triangles sont semblables.

Remarque :
- Nous employons ici le mot composé, qui ne signifie rien d'autre que le fait de transformer d'abord le triangle initial, par une isométrie, puis, de transformer cette image, par une homothétie, pour obtenir le triangle final.
- Des triangles isométriques sont semblables : il suffit de considérer l'identité comme une homothétie de rapport 1.

Théorème : Deux triangles sont semblables si et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée :

TRANSFORMATIONS PLANES

- *Ils possèdent deux angles égaux deux à deux (donc aussi trois puisque la somme des angles de chaque triangle vaut 180).*
- *Ils ont un angle égal et les côtés formant cet angle pour un des triangles ont des longueurs proportionnelles aux côtés formant l'angle de l'autre triangle.*
- *Les trois côtés de l'un sont proportionnels aux trois côtés de l'autre.*