

## FICHE N°4 - MULTIPLES ET DIVISEURS

*a et b sont deux nombres naturels.*

*Si  $a = b \times k$  alors :*

*a est un multiple de b*

*b est un diviseur de a*

*a est divisible par b*

### Propriétés générales

- *Tout naturel est multiple de 1.*
- *1 est diviseur de tout naturel.*
- *1 n'a qu'un seul diviseur : lui-même.*
- *Tout naturel est multiple ET diviseur de lui-même.*
- *0 n'a qu'un seul multiple : lui-même.*
- *Si a est diviseur de n, alors le quotient de  $\frac{n}{a}$  est un diviseur de n, puisque  $n = a \times q$ .*

### Propriétés des opérations

- *Si a et b sont multiples de c, alors  $a + b$  est multiple de c.*
- *Si c est un diviseur de a et b, alors c est un diviseur de  $a + b$ .*
  
- *Si  $a \geq b$  et que a et b sont multiples de c, alors  $a - b$  est multiple de c.*
- *Si  $a \geq b$  et que c est un diviseur de a et b, alors c est un diviseur de  $a - b$ .*
  
- *Si a et b sont multiples de c, alors  $a \times b$  est multiple de c.*
- *Si c est un diviseur de a et b, alors c est un diviseur de  $a \times b$ .*
  
- *Si a est multiple de b, et que b est multiple de c, alors a est multiple de c.*
- *Si c est un diviseur de b, et que b est un diviseur de a, alors c est un diviseur de a.*

### Critères de divisibilités

- *Un nombre est divisible par 2 quand son chiffre des unités est pair.*
- *Un nombre est divisible par 4 quand le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.*
- *Un nombre est divisible par 5 seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.*
- *Un nombre est divisible par 10 seulement si son chiffre des unités est 0.*
- *Un nombre est divisible par 9 seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.*



## FICHE N°4 - MULTIPLES ET DIVISEURS

- Un nombre est *divisible par 3* seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

### Nombres premiers

*Un nombre est dit premier s'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.*

*Les multiples de deux nombres (ou plus) sont les multiples du PPCM de ces deux nombres.*

*Les diviseurs communs de deux nombres (ou plus) sont les diviseurs du PGCD de ces deux nombres.*

*Deux nombres naturels dont le PGCD est 1 sont dits « premiers entre eux ».*

*Les décompositions en produits de facteurs premiers de deux nombres premiers entre eux n'ont aucun facteur commun.*

*Si  $n$  est divisible par  $a$  et  $b$ , et si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $n$  est divisible par  $a \times b$ .*

*Si un  $n$  divise un produit de deux facteurs et s'il est premier avec l'un d'entre eux, alors il divise l'autre.*

### METHODE

#### 1) Chercher si un nombre est premier

- Diviser ce nombre par le plus petit nombre premier : 2. S'il n'est pas divisible par 2, poursuivre.
- Diviser ce nombre par les nombres premiers consécutifs, dans l'ordre croissant : 3, 5, 7, 11, etc.
- Arrêter au plus grand nombre premier inférieur à  $\sqrt{n}$ .
- Si le nombre que l'on cherchait à diviser n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors il est lui-même premier.

#### 2) Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

- Diviser le nombre  $n$  par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.
- Diviser le quotient obtenu par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.
- Continuer ainsi jusqu'à ce que le quotient soit égal à 1. La décomposition est le produit de tous les nombres entiers successifs.

*Exemple : Trouver la décomposition de 392.*

$$392 \mid 2 = 196 \quad 196 \mid 2 = 98 \quad 98 \mid 2 = 49 \quad 49 \mid 7 = 7 \quad 7 \mid 7 = 1$$

*La décomposition est donc :  $2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 7^2$*



## FICHE N°4 - MULTIPLES ET DIVISEURS

### 3) Chercher tous les diviseurs d'un nombre

- Décomposer le nombre en produits de facteurs premiers.
- Utiliser un arbre permettant d'obtenir les décompositions en produits de facteurs premiers de ces diviseurs (voir « Les nombres - Méthodes de dénombrement »).

*Exemple : La décomposition de 392 est  $2^3 \times 7^2$ .*

*On a donc :*

$2^0 \rightarrow 7^0$	$2^0 \rightarrow 7^1$	$2^0 \rightarrow 7^2$
$2^1 \rightarrow 7^0$	$2^1 \rightarrow 7^1$	$2^1 \rightarrow 7^2$
Etc.		

### 4) Chercher combien de diviseurs possède un nombre n

- Décomposer le nombre  $n$  en produits de facteurs premiers.
- La décomposition obtenue est de forme  $a^p \times b^q \times c^r$ . On utilise la formule suivante pour trouver le nombre de diviseurs de  $n$  :

$$(p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1)$$

### 5) Trouver le PPCM de deux nombres

**Rappel :** le PPCM est le « plus petit commun multiple » de deux nombres.

- Décomposer les deux nombres en produits de facteurs premiers.
- Calculer le PPCM en multipliant tous les types de facteurs qui figurent dans l'une ou l'autre des décompositions, affectés de l'exposant le plus grand avec lesquels ils sont notés dans l'une des décompositions.

*Exemple :  $72 = 2^3 \times 3^2$        $90 = 2 \times 3^2 \times 5$       Donc le PPCM =  $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$*

### 6) Trouver le PGCD de deux nombres

**Rappel :** le PGCD est le « plus grand commun diviseur » de deux nombres.

- Décomposer les deux nombres en produit de facteurs premiers.
- Calculer le PGCD en multipliant tous les types de facteurs qui figurent dans l'une et l'autre des décompositions, affectés de l'exposant le plus petit avec lesquels ils sont notés dans l'une des



## FICHE N°4 - MULTIPLES ET DIVISEURS

décompositions. S'il n'y a pas de facteur commun aux deux décompositions, alors le PGCD est 1.

*Exemple* :  $42 = 2 \times 3 \times 7$

$98 = 2 \times 7^2$

*Donc le PGCD* =  $2 \times 7 = 14$

### 7) Utiliser ses connaissances pour savoir si a est un diviseur de b

*Méthode 1* : Utiliser un critère de divisibilité, si c'est possible.

*Méthode 2* : Dans la division euclidienne, regarder si le reste est égal à 0 ou si  $b = a \times$  un nombre naturel.

*Méthode 3* : Chercher si b est la somme, la différence ou le produit de nombres tous divisibles par a.

*Méthode 4* : Décomposer les nombres en produit de facteurs premiers. Si les facteurs de a et de b sont les mêmes et que les exposants des facteurs de a sont inférieurs ou égaux à ceux de b, alors a est un diviseur de b.

*Méthode 5* : utiliser le fait que si m est un diviseur de n et n un diviseur de p, alors m est un diviseur de p.

