LA GÉOMÉTRIE PLANE

Première partie

Objets élémentaires : droites, cercles, angles

1) Les droites

Les droites sont les objets les plus élémentaires de la géométrie. Mais qu'est-ce qu'une droite déjà ?

a- Droite, segment, longueur... Quel mot choisir ?

***Définition** : Soient A et B deux points du plan. La droite (AB) est l'ensemble des points C tels que A, B, C soient alignés.*

***Remarque** : Attention ! Pourquoi a-t-on mis (AB) entre parenthèses ? Il faut bien différencier (AB), $[AB]$, AB et $[AB)$, qui représentent des objets différents :*

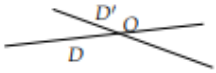
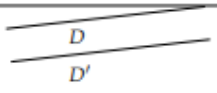
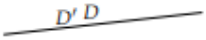
- *La notation (AB) qui représente la droite.*
- *La notation $[AB]$ qui représente le segment d'extrémités A et B, c'est-`a-dire tous les points situés entre A et B.*
- *La notation AB qui signifie la longueur AB (ou sa mesure).*
- *La notation $[AB)$, qui signifie la demi-droite partant de A dans la direction de B. Nous ne sommes pas obliges d'appeler une droite par deux points contenus dedans. Dans toute la suite, on appellera D une droite.*

b- Position relative de deux droites

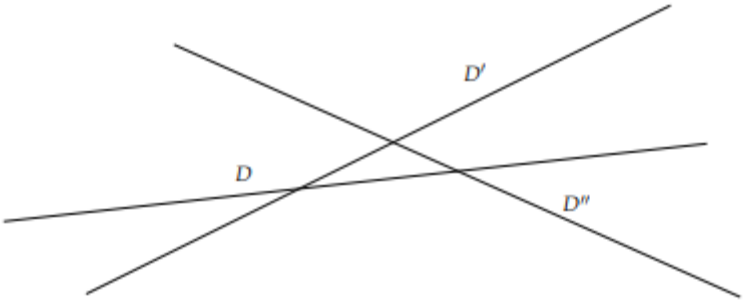
Comment peuvent se comporter deux droites D et D' dans le plan ? Il n'y a que deux cas de figure : Les droites D et D' se coupent, ou ne se coupent pas. Dans le premier cas, on dit qu'elles sont sécantes, dans le second, on dit qu'elles sont parallèles. Parmi les droites parallèles, il y a deux cas de figure, les droites D et D' sont distinctes, ou confondues (dans ce cas elles sont egales).

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Résumons ceci dans un tableau :

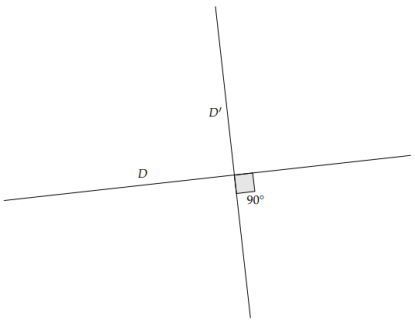
	Droites sécantes	Droites parallèles	
Dessin			
Vocabulaire	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues
Notation	$\mathcal{D} \nparallel \mathcal{D}'$	$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$	$\mathcal{D} = \mathcal{D}'$
Intersection	$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{O\}$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \mathcal{D} = \mathcal{D}'$

Remarque : *Trois droites peuvent être sécantes, mais pas forcement en un point, comme le montre la figure suivante : La figure formée est un triangle.*



Lorsque les trois droites se coupent en un point, on dit qu'elles sont concourantes. Cas particulier de droites sécantes

Définition : *Lorsque deux droites sécantes forment quatre angles égaux on dit qu'elles sont perpendiculaires. Mais c'est quoi un angle ? Certes, nous n'avons pas encore défini ce qu'est un angle, que vous verrez dans la suite, plus formellement. Mais nul doute que vous en avez l'intuition. De même, vous vous souvenez sans doute que « le tour complet d'un cercle » détermine un angle, de mesure 360°. Les quatre angles délimités par nos deux droites perpendiculaires mesurant 360°, on peut alors affirmer que chacun des angles qu'elles déterminent mesure 90°. Un angle de mesure 90° est appelé angle droit. Notons quelques propriétés importantes, qui fondent la base de la géométrie euclidienne (celle qu'on étudie ici).*



LA GÉOMÉTRIE PLANE

 # 1 :

- *Par deux points distincts du plan, passe une et une seule droite.*
- *Par un point du plan, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.*
- *Si A, B, C sont trois points tels que les droites (AB) et (BC) sont parallèles, alors ces trois points sont alignés.*
- *Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors ces deux droites sont parallèles entre elles.*
- *Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles.*
- *Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

c- Milieu d'un segment et distance d'un point `a une droite

Définition : *Soit $[AB]$ un segment. Le point I du segment $[AB]$ v´erifiant l'´egalit´e de longueurs $AI = BI$ est appelé milieu du segment $[AB]$.*

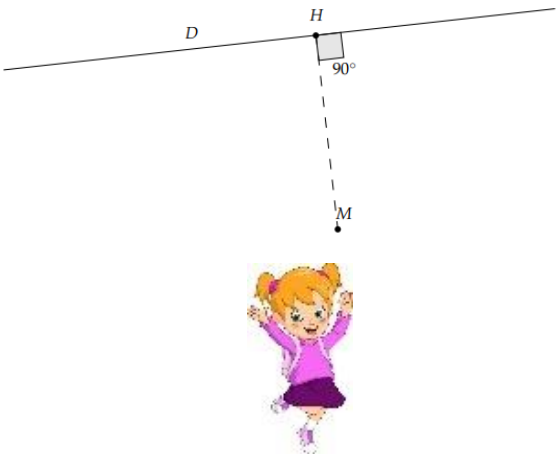
Remarque : *Le fait que I appartienne au segment $[AB]$ est très important. En effet, l'égalité de longueur ne suffit pas à affirmer que le point I est le milieu du segment $[AB]$. En effet, nous verrons plus loin que si on sait que le point I vérifie $AI = BI$, on peut seulement affirmer que I appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. Réciproquement, l'affirmation « I est milieu de $[AB]$ » nous fournit deux indications : Une égalité de longueurs, et un alignement dans un ordre fixé : les points A, I et B sont alignés. La distance d'un point M quelconque du plan, a un ensemble de points (E) est la plus petite distance réalisée entre le point M et tout autre point de l'ensemble (E). C'est ainsi que l'on définit la distance d'un point à une droite du plan*

Définition : *La distance d'un point M à une droite D est la plus petite longueur réalisée entre M et tout point de la droite D.*

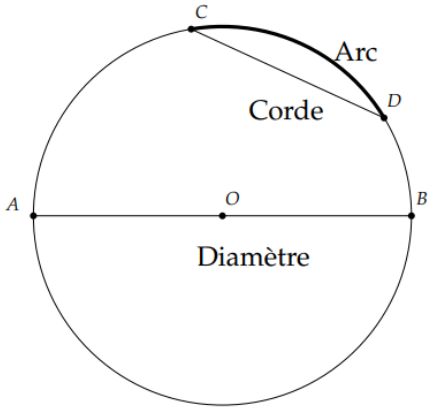
 # 2 : *La distance d'un point M à une droite D est égale à la longueur du segment $[MH]$, où H est le point de la droite D tel que (MH) est perpendiculaire à D. On note généralement*

$$d(M, D) = MH$$

MH est la plus petite distance réalisée entre le point M et tout point de la droite D.



LA GÉOMÉTRIE PLANE



2) Les cercles

a- Présentation et vocabulaire

Définition : Un cercle C est l'ensemble des points équidistants d'un point O fixé. Notons r la distance constante entre le point O et un point M quelconque du cercle C (de toutes façons, ce sont toutes les mêmes !). On dit que O est le centre du cercle C, que r est le rayon du cercle et $2r$ son diamètre.

3 : Un point A quelconque du plan est sur le cercle C de centre O et de rayon r si et seulement si $OA = r$.

Remarque : Le mot rayon peut donc désigner à la fois un nombre (mesure d'une longueur), et à la fois un segment (d'extrémités le centre et un point du cercle). Il en va de même au sujet du mot diamètre. Il n'y a en général pas d'ambiguïté et le contexte permet de trancher.

- La surface intérieure du cercle s'appelle disque de centre O, de rayon r.
- Le segment $[CD]$ est une corde de C.
- CD s'appelle l'arc de cercle décrit par C et D sur le cercle C.

Remarque : L'arc $\overset{\frown}{CD}$ est un des deux ensembles de points situ´es sur le cercle et compris entre C et D. Il y a donc deux arcs possibles, suivant le sens dans lequel on tourne sur le cercle. En général, le texte indique lequel des deux arcs il convient de considérer (par exemple, ici il est en gras).

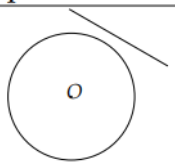
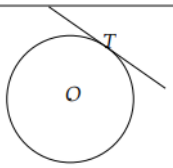
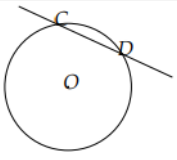
4 : Par trois points passe un et un unique cercle.

b- Position relative d'un cercle et d'une droite

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Une droite peut se comporter de deux manières différentes avec un cercle : soit elle le « touche », soit-elle ne le « touche pas » ! Mais une droite a plusieurs manières de "toucher" un cercle…

***Définition** : Une droite D est dite sécante à un cercle C lorsqu'elle le coupe en deux points distincts. Elle est dite tangente au cercle lorsqu'elle ne le coupe qu'en un unique point. Recapitulons les possibilités dans un tableau :*

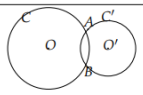
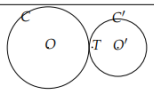
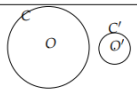
	La droite ne coupe pas le cercle	La droite coupe le cercle	
Dessin			
Vocabulaire	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont **disjoints**	$\mathcal{D}$ et C sont **tangents**	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont **sécants**
Distance	$d(O,\mathcal{D}) > r$	$d(O,\mathcal{D}) = r$	$d(O,\mathcal{D}) < r$
Intersection	$\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{T\}$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{C, D\}$

***# 5** :*

- ***La droite D est tangente en T au cercle C de centre O si et seulement le cercle C et la droite D ont le point T en commun et si la droite (OT) est perpendiculaire en T à la droite D.***
- ***La droite D est tangente au cercle C si et seulement si $d(O,D) = r$.***

c- *Position relative de deux cercles*

Soient deux cercles C et C', de centres respectifs O et O', et de rayons respectifs r et r'. Prenons sans perte de généralité $r > r'$. Quelle est la position relative de C et C' ?

Position de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$	$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants	$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents		$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont disjoints	
Dessin					
Précisions	$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants	$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents intérieurement	$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement	$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont extérieurs	$\mathcal{C}'$ est intérieur à $\mathcal{C}$
Distances	$OO' < r + r'$ et $OO' > r - r'$	$OO' = r - r'$	$OO' = r + r'$	$OO' > r + r'$	$OO' < r - r'$
Intersection	$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$	$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{T\}$		$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$	

LA GÉOMÉTRIE PLANE

3) Les angles

a- Définition d'angle et de mesure d'angle

Les notions de ce paragraphe seront définies de façon assez intuitive, notamment celle de figures superposables, correspondant à des figures images l'une de l'autre par une isométrie : la présentation rigoureuse de la notion d'angle et de mesure d'angle étant trop complexe pour être exposée ici.

***Définition** : On appelle secteur angulaire toute portion de plan limitée par deux demi-droites de même origine. L'ensemble des secteurs angulaires superposables permet de définir un même angle. Deux demi-droites de même origine O, $[OA)$ et $[OB)$ définissent donc un angle, noté $\widehat{AOB}$. Cette origine commune O est appelée sommet de l'angle.*

Si l'on se donne deux autres demi-droites $[O'A')$ et $[OB')$, on dit qu'elles définissent le même angle $\widehat{AOB}$ si on peut superposer les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ avec les demi-droites $[O'A')$ et $[O'B')$, quitte à retourner ces dernières. De la même manière que l'on a défini un étalon pour les degrés Celsius (rappelons qu'il a été choisi de placer 100°C à la température à laquelle l'eau bouillait), pour définir une mesure d'angle, il reste à définir l'angle étalon : il va s'agir de l'angle plat (angle défini par trois points O, A, B alignes avec O sur le segment $[AB]$), pour lequel la mesure sera definie comme égale à 180°. Ceci nous permet alors de définir la mesure de l'angle droit. Puisque la somme de deux angles droits fait un angle plat et que les mesures s'ajoutent, on a :

$$2 \times \text{mesure de l'angle droit} = 180°$$

et donc l'angle droit mesure 90°. Enfin, comme souvent en mathématiques, par raccourci de langage on parle d'angle de 90° au lieu d'angle de mesure 90° et on désigne par $\widehat{AOB}$, a la fois l'angle formé par les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$, et la mesure de cet angle.

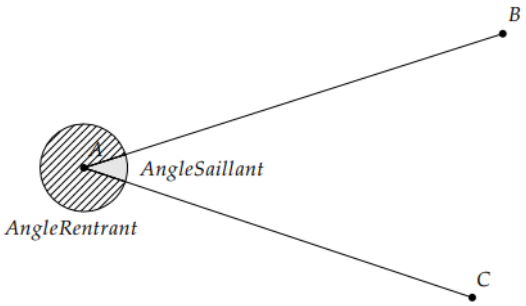
b- Un peu de vocabulaire...

- *Lorsque les deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ sont perpendiculaires, on dit qu'elles forment un angle droit. Dans ce cas, $\widehat{AOB} = 90°$.*
- *Un angle $\widehat{AOB}$ est dit plat lorsque les points O, A, B sont alignes et que O est sur le segment $[AB]$. En ce cas, $\widehat{AOB} = 180°$.*
- *Un angle est dit aigu, lorsque sa mesure est plus petite que celle de l'angle droit.*
- *Un angle est dit obtus lorsque sa mesure est comprise entre le droit et le plat* $(90° < AOB < 180°)$.
- *Un angle est dit saillant lorsque sa mesure est inférieure à 180°.*
- *Sinon, il est dit rentrant.*

LA GÉOMÉTRIE PLANE

- ***On dit que des angles sont complémentaires lorsque leurs mesures α et β vérifient $\alpha + \beta = 90°$.***
- ***On dit que des angles sont supplémentaires lorsque leurs mesures α et β vérifient $\alpha + \beta = 180°$.***

***Remarque :** Quel angle mesurer ? Il y a, pour un triplet de points, deux angles, un saillant, et un rentrant. Sauf indication contraire de l'énoncé, nous calculons toujours la mesure de l'angle saillant.*

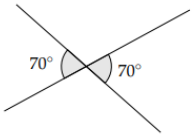
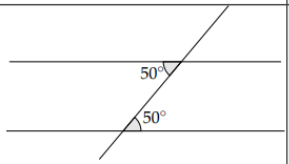
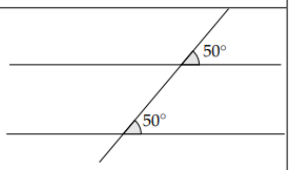


c- Propriétés des angles

***# 6 :** (Relation de Chasles). Pour quatre points A, B, C, O, on a :*

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}.$$

La relation de Chasles se retrouve très souvent en mathématiques, et ne s'applique pas qu'aux angles (exemple : vecteurs, intégrales etc.). Les propriétés suivantes permettront, dans les exercices, de démontrer que des angles sont égaux (quand on a par exemple des hypothèses de parallélisme), soit de démontrer que des droites sont parallèles (quand on connaît l'égalité de certains angles). Elles sont regroupées dans un tableau récapitulatif :

Angles opposés par le sommet	Angles alternes-internes	Angles correspondants
		
Deux droites sécantes définissent des angles opposés par le sommet	Deux droites parallèles et une sécante commune aux deux droites	Même configuration que précédemment : les angles sont situés du même côté de la sécante et sont définis entre cette sécante et chaque parallèle.

LA GÉOMÉTRIE PLANE

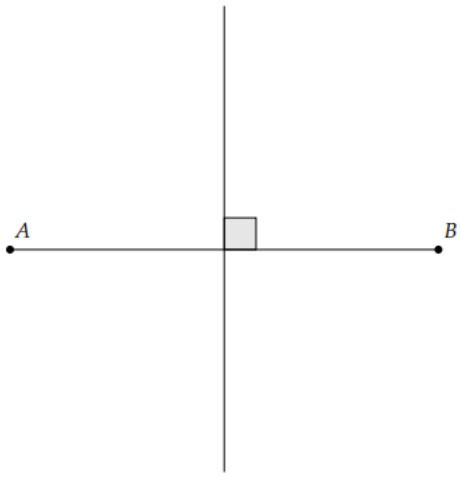
Deuxième partie

Théorèmes de droites et d'angles

1) Médiatrice d'un segment

a- Définition

Définition : *La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire au segment.*



Remarque : *Il y a beaucoup de définitions équivalentes pour la médiatrice d'un segment, que nous verrons au fil des propositions. On peut alors choisir celle qui nous plaît (et surtout qui est la plus adaptée !) pour résoudre un exercice.*

b- Propriétés

La médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B.
On utilise cette propriété de deux façons :

- *Si on sait que $MA = MB$ alors on peut conclure que M est sur la médiatrice de $[AB]$.*
- *Si on sait que le point M est sur la médiatrice de $[AB]$, alors on peut conclure que $MA = MB$.*
- *On peut ainsi démontrer de plusieurs façons qu'une droite est médiatrice d'un segment :*
- *Si on montre qu'une droite contient deux points équidistants des extrémités d'un segment, alors on peut affirmer que cette droite est médiatrice du segment.*

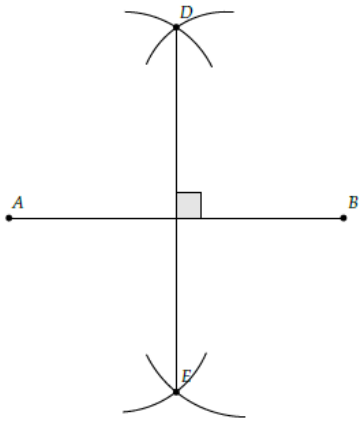
LA GÉOMÉTRIE PLANE

- ***Si on montre qu'une droite est perpendiculaire à un segment et qu'elle contient un point équidistant des extrémités de ce segment, alors on peut affirmer que cette droite est médiatrice du segment.***
- ***Si on montre qu'une droite est perpendiculaire à un segment et qu'elle passe par son milieu, alors on peut affirmer que cette droite est médiatrice du segment.***

c- ***Construction***

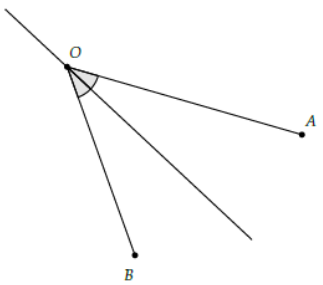
Comment construire la médiatrice du segment $[AB]$***, avec une règle et un compas ?***

- ***Tracer le cercle de centre*** A ***et passant par*** B***.***
- ***Tracer le cercle de centre*** B ***et passant par*** A***.***
- ***Tracer la droite passant par les deux points d'intersection de ces deux cercles : c'est la médiatrice de*** $[AB]$***.***



2) Bissectrice d'un angle

Définition : La bissectrice d'un angle $\widehat{AOB}$ ***est la droite passant par*** O ***et qui partage l'angle en deux angles de même mesure.***



LA GÉOMÉTRIE PLANE

Remarque : ***La bissectrice d'un angle est aussi définie comme l'axe de symétrie de l'angle.***

a- Propriétés

Si un point M est sur la bissectrice (Oz) de l'angle $\widehat{AOB}$, alors il est équidistant des deux droites (OA) et (OB) formant l'angle.

Réciproquement :

- ***Si M est un point du secteur angulaire défini par $\widehat{AOB}$ équidistant des deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$, alors il est sur la bissectrice de l'angle.***
- ***Soient deux droites (OA) et (OB) sécantes en O. Elles possèdent deux bissectrices, sécantes en O, et qui sont perpendiculaires.***

b- Construction (voir figure 2)

Comment construire la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$, avec une règle et un compas ?

- ***Tracer un cercle de centre O, appelé C, qui coupe la demi-droite $[OA)$ en H et coupe $[OB)$ en H'.***
- ***Tracer le cercle de centre H et passant par H' et le cercle de centre H' et passant par H.***

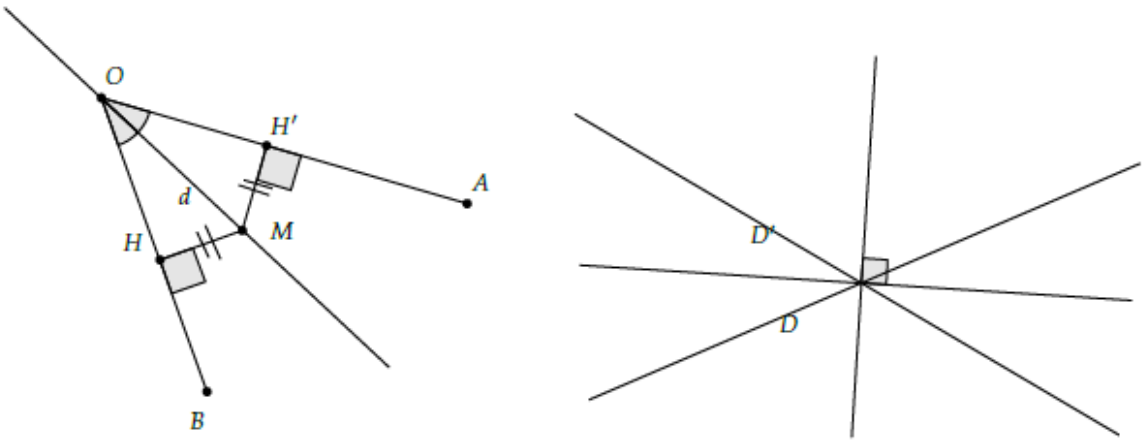


FIGURE 1 : Illustration des propriétés 1 et 2

- ***Ces deux cercles se coupent en I (et I'). Tracer la droite (OI) (ou (OI')), qui est la bissectrice de l'angle.***

LA GÉOMÉTRIE PLANE

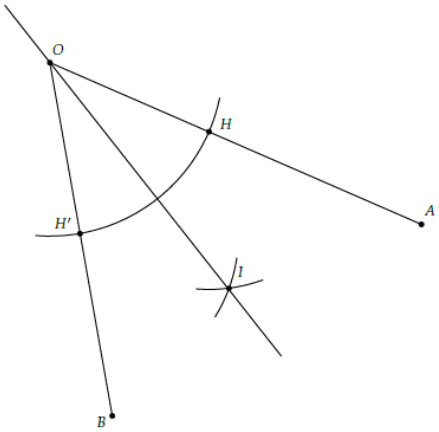


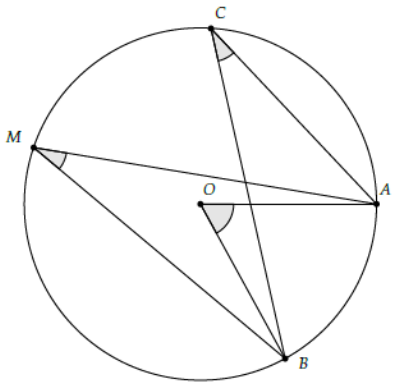
FIGURE 2

3) Angle au centre, angle inscrit

Définition :

- ***Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet appartient au cercle, et dont les côtés coupent le cercle.***
- ***Un angle au centre dans un cercle est un angle dont le sommet est le centre du cercle.***

Soient A, B, C, M quatre points d'un même cercle. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ACB}$ sont dits angles inscrits dans le cercle. L'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre correspondant à ces deux angles inscrits, où O est le centre du cercle. On dit que les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent l'arc formé par A et B.



LA GÉOMÉTRIE PLANE

Les trois théorèmes suivants sont extrêmement importants :

Théorème : ***(Théorème de l'angle au centre). Si un angle au centre intercepte le même arc qu'un angle inscrit, la mesure de l'angle au centre est égale au double de celle de l'angle inscrit :***

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}.$$

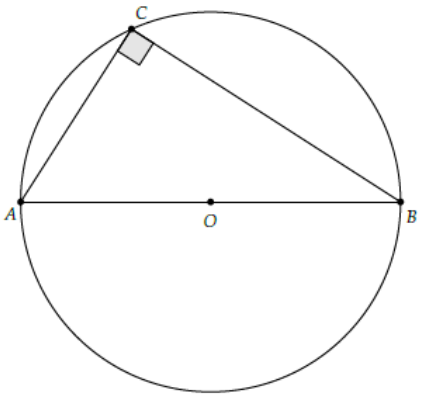
Conséquence :

Théorème : ***(Théorème de l'angle inscrit). Deux angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.***

Théorème : ***Si*** $[AB]$ ***est un diamètre du cercle et*** C ***un point quelconque du cercle, distinct de*** A ***et*** B***, alors le triangle*** ABC ***est rectangle en*** C***.***

Illustration :

Cette remarque nous amène à étudier de plus près certaines formes géométriques.
Commençons par les triangles.



LA GÉOMÉTRIE PLANE

Troisième partie

Les triangles

1) Généralités

Cette section est principalement constituée de théorèmes généraux sur les triangles, qu'il faut connaître et savoir utiliser.

a- Théorème des milieux et théorème de Thales

Théorème : ***(Théorème de la droite des milieux). Soit*** ABC ***un triangle. Soit*** A' ***le milieu du segment*** $[BC]$ ***et*** B' ***le milieu du segment*** $[AC]$ ***: La droite*** $(A'B')$ ***est parallèle au troisième côté*** $[AB]$ ***et***

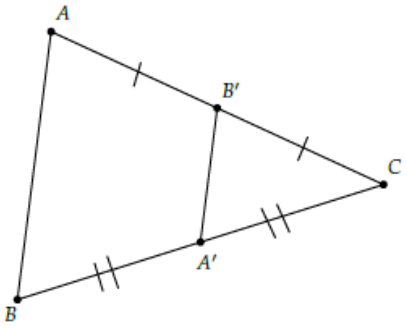
$$2 \times A'B' = AB.$$

Réciproquement :

- ***Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle et passe par le milieu d'un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu. Avec les notations précédentes on a de plus :***

$$AB = 2A'B'$$

Illustration :



- ***Cas direct : Si on sait que l'on a un triangle*** ABC ***avec*** A' ***milieu de*** $[BC]$ ***et*** B' ***milieu de*** $[AC]$, ***alors le th´eor`eme de la droite des milieux permet d'affirmer que*** $(A'B')$ ***est parallèle à*** (AB) ***et que :***

$$AB = 2A'B'.$$

LA GÉOMÉTRIE PLANE

- ***Cas indirect** : Si on sait que l'on a un triangle ABC avec A' milieu de $[BC]$ et que la droite D est parallèle à (AB) et passe par A', alors le théorème de la droite des milieux permet d'affirmer que la droite D coupe le côté $[AC]$ en son milieu. De plus, on affirmer que :*

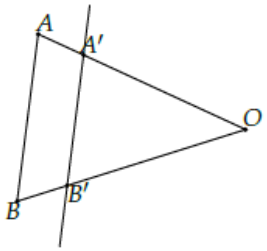
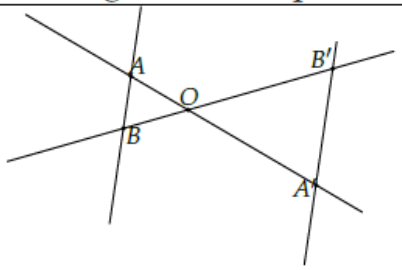
$$AB = 2A'B'.$$

Voici une généralisation du théorème des milieux : Le bien connu théorème de Thalès !

***Théorème** : (Théorème de Thalès). Soient (OA) et (OB) deux droites sécantes en O. Soient A' un point de (OA), et B' un point de (OB). Si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, alors on peut affirmer que :*

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Il y a deux configurations d'application de ce théorème :

Configuration triangle	Configuration Papillon
	

***Applications** :*

- ***Lorsque l'on dispose d'une configuration d'un des deux types précédents, avec une paire de droites parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire une égalité de rapports, permettant de calculer une des longueurs manquantes.***
- ***Il permet aussi de partager un segment en segments de même longueur : Placer deux points A et B de façon arbitraire. Partager le segment $[AB]$ en trois segments de même longueur (sans mesurer la longueur de $[AB]$).***
  On obtient ce partage en traçant une configuration de Thalès adéquate. Il faut donc tracer une demi-droite D d'origine A. Puis, choisir arbitrairement une longueur et la reporter trois fois sur D à partir du point A. Soit B' le dernier point obtenu. Tracer ensuite les parallèles à (BB') passant par les deux autres points de D. Ces parallèles coupent $[AB]$ en deux points qui le partagent en trois segments de même longueur.

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Théorème : ***(Réciproque du théorème de Thalès). Soient*** (OA) ***et*** (OB) ***deux droites sécantes (en*** O***, bien entendu). Soient*** A' ***un point de*** (OA)***, et*** B' ***un point de*** (OB) ***tels que*** O, A, A' ***d'une part, et*** O, B, B' ***d'autre part sont alignés dans cet ordre.***
Si on sait que :

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

alors on peut affirmer que les droites (AB) ***et*** $(A'B')$ ***sont parallèles.***

Remarque : ***La réciproque du théorème de Thalès est utilisée pour montrer le parallélisme de deux droites, quand on connaît les longueurs des segments nécessaires.***

b- Propriétés angulaires

Théorème : ***La somme des mesures des trois angles dans un triangle vaut*** $180°$***. Ces angles sont supplémentaires.***

Remarque :

- ***Ainsi, les trois angles dans un triangle sont des angles saillants, mais cela n'empêche que l'un de ses angles puisse être obtus.***
- ***La longueur d'un des côtés d'un triangle est toujours inferieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.***
- ***Si trois points*** A, B, C ***sont tels que*** $AB + BC = AC$***, alors le point*** B ***appartient au segment*** $[AC]$.

Cette dernière remarque, vous la connaissez bien, c'est le fameux dicton « Le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre est la ligne droite. »

2) Droites remarquables des triangles

Il y a 4 types de droites remarquables dans un triangle. Chacune a ses propres propriétés. Chaque type de droite remarquables contient trois droites : une associée à chaque côté.

a- Les médianes

Définition : ***La médiane issue d'un sommet du triangle est la droite passant par ce sommet et le milieu du côté opposé au sommet.***

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Théorème : *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point noté G, appelé centre de gravité du triangle. On a alors les relations suivantes :*

$$AG = \frac{2}{3} AA', BG = \frac{2}{3} BB', CG = \frac{2}{3} CC'$$

Le centre de gravité d'un triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet. Que signifie physiquement le centre de gravité du triangle ?

 # 1 : *La médiane relative à un côté partage le triangle en 2 triangles de même aire.*

Réciproquement :

- *Si dans un triangle, une droite passant par un sommet partage le triangle en deux triangles de même aire, cette droite est la médiane issue du sommet.*

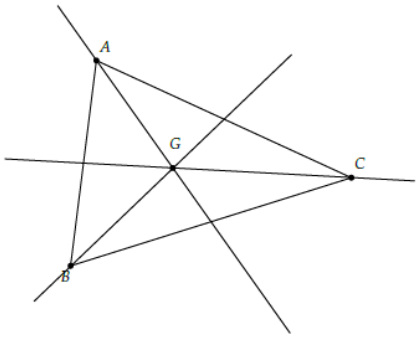
b- Les médiatrices

Définition : *On appelle médiatrice d'un côté d'un triangle, la médiatrice de ce côté.*

Remarque : *Comme il y a trois côtés, il existe trois médiatrices.*

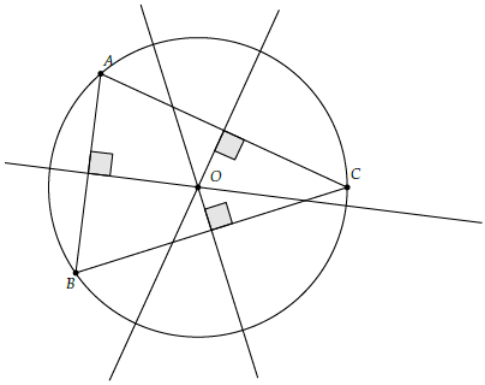
Théorème : *Les trois médiatrices dans un triangle sont concourantes, en un point, noté O, centre du cercle circonscrit au triangle. Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets du triangle. On a alors :*

$$OA = OB = OC.$$



Remarque : *Le centre du cercle circonscrit peut être à l'extérieur du triangle. Cela se produit lorsque l'un des angles du triangle est obtus.*

LA GÉOMÉTRIE PLANE



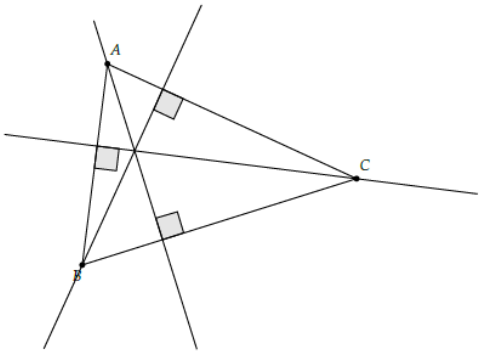
c- Les hauteurs

La hauteur issue d'un sommet du triangle est la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé au sommet.

Théorème : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point noté H, appelé orthocentre du triangle.

Remarque : L'orthocentre peut être à l'extérieur du triangle. Cela se produit lorsque l'un des angles du triangle est obtus.

 # 2 : Si dans un triangle, une droite passe par l'orthocentre et par un sommet du triangle, alors cette droite est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

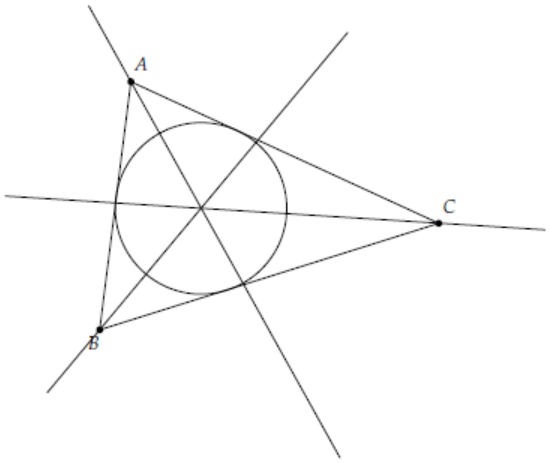


d- Les bissectrices

La bissectrice issue d'un sommet d'un triangle est la bissectrice de l'angle formé par les côtés issus de ce sommet.

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Théorème : ***Les trois bissectrices du triangle sont concourantes en un point, noté I, qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle. C'est le cercle tangent intérieurement aux trois côtés du triangle.***
Les points de contact de ce cercle et du triangle sont les projetés orthogonaux du point I sur les trois côtés du triangle.



3) Triangles particuliers

a- Le triangle rectangle

Un triangle rectangle est un triangle possédant un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit est appelé hypoténuse.
Une simple application du théorème de la droite des milieux permet de voir que les médiatrices des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle se coupent au milieu de l'hypoténuse, ce qui donne la propriété suivante :

 # 3 :

- ***Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle.***

Réciproquement :

- ***Si le centre du cercle circonscrit au triangle est le milieu d'un des côtés, alors ce triangle est rectangle.***
- ***La médiane issue du sommet de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.***

LA GÉOMÉTRIE PLANE

***Réciproquement* :**

- ***Si dans un triangle, la médiane issue d'un des sommets mesure la moitié du côté opposé, alors le triangle est rectangle en ce sommet.***

Passons maintenant au plus célèbre théorème de maths, celui que vous attendez tous impatiemment…

Théorème* : *(Théorème de Pythagore). Si un triangle ABC est rectangle en A, alors la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Le théorème de Pythagore est utilisé pour calculer un des côtés d'un triangle dont on connaît les deux autres côtés et dont sait qu'il est rectangle : Lorsque l'on sait que le triangle que l'on considère est rectangle, et que l'on connaît la longueur de deux de ses trois côtés, alors, après avoir écrit le théorème de Pythagore, on peut calculer la longueur du dernier côté.
Le plus célèbre des triangles rectangles est celui de côtés 3, 4, 5. En effet, on a $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Si l'on connaît bien le théorème de Pythagore, il ne faut pas négliger sa réciproque, tout aussi importante.

Théorème* : *(Réciproque du théorème de Pythagore). Si, après avoir calculé le carré des longueurs des trois côtés du triangle, on constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors on peut affirmer que le triangle ABC est rectangle en A.
La réciproque du théorème de Pythagore est utilisée pour montrer qu'un triangle, dont on connaît les longueurs des trois côtés, est rectangle. Lorsque l'on a un triangle dont on connaît la longueur des trois côtés, on calcule la somme des carrés des deux plus petites longueurs, que l'on compare au carré de la plus grande des longueurs. Si on a égalité, alors, grâce à la réciproque du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle est rectangle.

Remarque* : *Attention ! Il faut bien savoir quelle règle on utilise pour trouver des résultats. Le théorème de Pythagore et sa réciproque ne démontrent pas du tout la même chose, il faut donc bien savoir si l'on veut calculer une longueur ou démontrer qu'un triangle est rectangle pour bien choisir le bon théorème à appliquer.
On va énoncer la contraposée du théorème de Pythagore, attention, ici encore, ce n'est pas la réciproque. Par exemple : prenons la proposition : « si je suis un Homme, alors j'ai deux jambes » (que l'on considère comme vraie).
La proposition réciproque est « si j'ai deux jambes, alors je suis un Homme ».
Elle est fausse (pensez aux canards…)
La proposition contraposée d'une proposition vraie est toujours vraie. Ici, c'est « si je n'ai pas deux jambes, alors je ne suis pas un Homme" (eh bien oui, des hommes à trois ou quatre jambes, ça n'existe pas !).

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Ces remarques sont très importantes en logique des mathématiques, et vous devez toujours garder en tête un exemple comme ceci.

 # 4 : (Contraposée du théorème de Pythagore). Si, après avoir calculé le carré des longueurs des trois côtés du triangle, on constate que :

$$BC^2 \neq AB^2 + AC^2,$$

Alors on peut affirmer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

Lorsque l'on a un triangle dont on connaît la longueur des trois côtés, on calcule la somme des carrés des deux plus petites longueurs, que l'on compare au carré de la plus grande des longueurs. S'il n'y a pas égalité, alors, grâce à ce que l'on nomme en mathématiques la contraposée du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle est n'est pas rectangle.

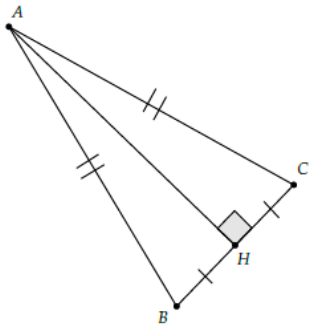
b- Le triangle isocèle

Un triangle isocèle est un triangle ayant deux de ses côtés de même longueur.
Un triangle isocèle en A est un triangle ayant les deux côtés $[AB]$ et $[AC]$ de même longueur. Le point A est appelé sommet principal du triangle ABC.

 # 5 : Soit ABC un triangle isocèle en A. Notons A' le milieu du côté $[BC]$: alors (AA') est axe de sym´etrie du triangle. De plus, (AA') est à la fois médiane, médiatrice, hauteur et bissectrice dans ce triangle et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux.

Réciproquement :

- ***Si dans un triangle, deux droites particulières différentes issues de A (médianes, hauteurs, bissectrice ou médiatrice de $[BC]$) sont confondues, alors le triangle est isocèle en A.***



LA GÉOMÉTRIE PLANE

c- *Le triangle équilatéral*

Le triangle équilatéral est le plus régulier de tous les triangles. Il possède toutes les belles propriétés que l'on imagine.
Un triangle équilatéral est un triangle ayant ses trois côtés de même longueur.

 # 6 :

- ***Un triangle est équilatéral si et seulement si ses trois angles sont égaux.***
- ***(Conséquence) Chacun des angles d'un triangle équilatéral mesure*** $60°$.
- ***Les médianes, médiatrices, bissectrices et hauteurs relatives à un même sommet d'un triangle équilatéral sont confondues.***
- ***Réciproquement, si dans un triangle deux droites particulières différentes relatives à deux sommets au moins (médianes, hauteurs, bissectrice ou médiatrice de*** $[BC]$***) sont confondues, alors le triangle est équilatéral.***

Exemple : Pour construire un angle de $60°$: il suffit de tracer un triangle équilatéral, en utilisant le fait que les côtés ont même longueur.
Pour construire un angle de $30°$: on trace un triangle équilatéral, puis la bissectrice d'un des angles. On obtient alors un angle de $30°$.

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Quatrième partie

Les quadrilatères

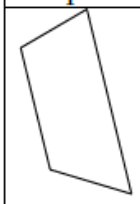
Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés. Un quadrilatère est donc une ligne brisée fermée plane, constituée de 4 sommets et de 4 segments joignant ses sommets. Ces segments se nomment côtés du quadrilatère. Le quadrilatère est dit non croisé lorsque les côtés du quadrilatère ne se coupent pas.

La somme des quatre angles dans un quadrilatère vaut 360°.

Voici quelques quadrilatères particuliers.

1) Le trapèze

- *Un trapèze est un quadrilatère non croisé ayant une paire de côtés opposés parallèles.*
- *Le trapèze isocèle est un trapèze dont les côtés non parallèles sont de même longueur.*
- *Le trapèze rectangle est un trapèze possédant un angle droit.*

Trapèze	Trapèze isocèle	Trapèze rectangle
		

2) Le parallélogramme

a- Définition et propriétés

Définition *: Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.*
 # 1 *: Si un quadrilatère est un parallélogramme alors il possède les quatre propriétés suivantes :*

- *Les angles opposés sont égaux.*
- *Deux angles consécutifs sont supplémentaires (leur somme vaut 180°).*
- *Les côtés opposés ont même longueur.*
- *Les diagonales ont le même milieu, qui est centre de symétrie.*

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, on utilise suivant les cas la définition, ou l'un des points du théorème suivant :

Théorème :

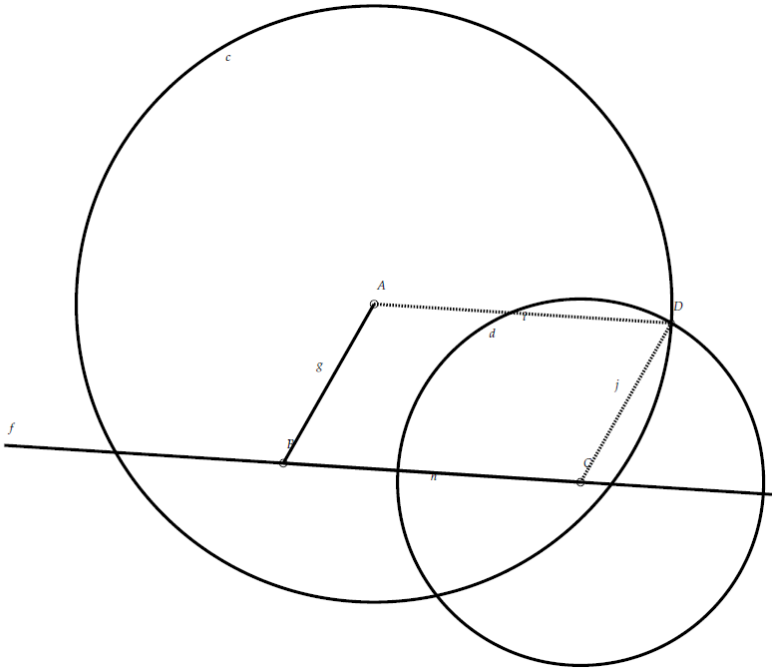
- ***Si un quadrilatère non croisé a ses deux paires de côtés opposés de même longueur alors c'est parallélogramme.***
- ***Si un quadrilatère non croisé a une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.***
- ***Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.***
- ***Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.***
- ***Si un quadrilatère non croisé a ses angles opposés égaux deux à deux alors c'est parallélogramme.***
- ***Si un quadrilatère a ses angles consécutifs supplémentaires deux à deux, alors c'est parallélogramme.***
- ***Une fois utilisé l'un des points de ce théorème, le parallélogramme obtenu possède ensuite toutes les propriétés énoncées plus haut.***

b- Construction d'une parallèle à une droite passant par un point

Pour comprendre la construction, il faut avoir en tête « parallélogramme », et se dire que l'on va tracer un parallélogramme ABCD, et donc, chercher à placer le point D, en se servant des propriétés de longueurs égales des côtés (et donc, on va tracer des cercles :)

- ***Tracer le cercle de centre A et de rayon BC et le cercle de centre C et de rayon AB.***

LA GÉOMÉTRIE PLANE



3) Le losange

Définition *: Un losange est un quadrilatère non croisé qui a tous ses côtés de même longueur.*

 # 2 : Si on sait qu'un quadrilatère est un losange alors on peut affirmer qu'il possède les trois propriétés suivantes :
Ses diagonales sont perpendiculaires et ont même milieu.
C'est un parallélogramme, il en possède donc toutes les propriétés.
Il a deux axes de symétrie : ses diagonales.

Réciproquement *:*
Pour démontrer qu'un quadrilatère est un losange, on utilise la définition, ou l'un des points du théorème suivant :

Théorème *:*

- *Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires et de même milieu alors c'est un losange.*
- *Si un quadrilatère est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.*
- *Une fois utilisé l'un des points de ce théorème, le losange obtenu possède ensuite toutes les propriétés énoncées plus haut.*

LA GÉOMÉTRIE PLANE

4) Le rectangle

Définition : *Un rectangle est un quadrilatère qui a trois angles droits.*

Remarquons que d'définir le rectangle par trois angles droits suffit.

 # 3 : Si un quadrilatère est un rectangle alors il possède les quatre propriétés suivantes :

- *Ses diagonales ont le même milieu et la même longueur.*
- *C'est un parallélogramme, il en possède donc toutes les propriétés.*
- *Il a deux axes de symétrie : les médiatrices des côtés, aussi appelées médianes du rectangle.*
- *Il possède 4 angles droits.*

Réciproquement :
Pour démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle, on utilise la définition, ou l'un des points du théorème suivant :

Théorème :
Si les diagonales d'un quadrilatère sont égales et ont le même milieu alors c'est un rectangle.
Si un quadrilatère est un parallélogramme et a un angle droit alors c'est un rectangle.
Une fois utilisé l'un des points de ce théorème, le rectangle obtenu possède ensuite toutes les propriétés énoncées plus haut.

5) Le carré

Définition : *Un carré est un quadrilatère qui a quatre côtés égaux et un angle droit.*

 # 4 : Si un quadrilatère est un carré, alors :

- *Ses diagonales sont de même longueur, perpendiculaires et ont même milieu.*
- *C'est un parallélogramme, un rectangle et un losange, il en possède donc toutes les propriétés.*
- *Il a quatre axes de symétrie (les médiatrices des côtés et les diagonales) et il a un centre de symétrie (le centre du carré, point d'intersection des diagonales).*

Réciproquement :
Pour démontrer qu'un quadrilatère est un carré, on utilise la définition, ou l'un des points du théorème suivant :

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Théorème :

- ***Si les diagonales d'un quadrilatère sont de même longueur, perpendiculaires et ont le même milieu alors c'est un carré.***
- ***Si un quadrilatère est un rectangle et a deux côtés consécutifs égaux alors c'est un carré.***
- ***Si un quadrilatère est un rectangle et à ses diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.***
- ***Si un quadrilatère est un losange et a deux côtés perpendiculaires alors c'est un carré.***
- ***Si un quadrilatère est un losange et ses diagonales de même longueur alors c'est un carré.***
- ***Si un quadrilatère est un parallélogramme et a des diagonales de même longueur et perpendiculaires alors c'est un carré.***

Une fois utilisé l'un des points de ce théorème, le carré obtenu possède ensuite toutes les propriétés énoncées plus haut.

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Cinquième partie

Eléments de didactique

1) Les instruments de géométrie au programme

L'équerre sert à vérifier la perpendicularité de deux droites ou de deux segments, et à tracer des droites perpendiculaires et des droites parallèles, en association avec la règle.
La règle non graduée sert à tracer des droites et des segments joignant deux points.
La règle graduée est un instrument de mesure, permettant de reporter des longueurs ou de mesurer un segment.
Le compas sert à tracer des cercles, à vérifier des égalités de longueur ou à reporter des longueurs.
Le gabarit d'angle est le seul outil susceptible de vérifier l'égalité de deux angles, ou de reproduire un angle donné : le rapporteur n'est pas un instrument utilisé à l'école primaire.

2) Les différents types de problèmes géométriques

Les verbes d'action du programme officiel correspondent à des types de problèmes que les élèves doivent rencontrer. Ces verbes sont, dans l'ordre d'apparition au programme : classer, reconnaître, nommer, décrire, reproduire représenter et construire.

Donnons-leur une définition :

- ***Classer** : C'est-à-dire, regrouper les objets géométriques sous forme de catégorie. Il faut bien comprendre que cette tâche est essentiellement d'ordre perceptif à ces débuts. C'est plus tard, une fois que différentes catégories auront émergé, que l'on pourra, soit donner un nom à la catégorie, soit faire émerger des invariants de ces objets pour aboutir, soit à une définition, soit à des propriétés des objets de la catégorie Attention au classement autoritaire décidé par l'enseignant, qui a déjà une idée (géométrique, cela va de soi !) en tête lorsqu'il propose l'activité (cf : les fiches de nombreux ouvrages à ce sujet !)*
- ***Reconnaître** : « saisir un objet par la pensée en reliant entre elles des images, des perceptions : identifier par la mémoire, le jugement ou l'action, juger un objet, comme compris dans une catégorie ». (Source : dictionnaire Le Petit Robert). Cette reconnaissance peut être simplement visuelle puis se faire avec l'aide des instruments.*
- ***Nommer** : Il s'agit de savoir associer à une figure, le nom de ou des objets géométriques, dans des situations simples, ou au sein d'une figure plus complexe. Cela peut concerner un objet (un carré, un losange, etc…) ou encore, des propriétés liant les objets (les côtés d'un rectangle, ses diagonales, etc…)*

LA GÉOMÉTRIE PLANE

- ***Décrire*** *: Décrire un objet, c'est donner sous forme orale ou écrite des propriétés géométriques qui permettent de l'identifier. C'est donc progressivement utiliser, en situation fonctionnelle, un vocabulaire géométrique adéquat.*
  Les activités de description vont permettre de préciser ce vocabulaire, de lui donner du sens. On peut décrire un objet pour que d'autres puissent le reconnaître parmi plusieurs et l'identifier, par comparaison et opposition avec d'autres, en choisissant le critère discriminant (jeu de portrait), le construire (situation de communication émetteur / récepteur).
  Décrire pour construire demande l'utilisation d'un vocabulaire plus précis, plus d'organisation et bien souvent des indications sur les mesures.
  On distingue souvent la tache de description et la tache de réalisation d'un programme de construction. On peut prendre comme exemple le travail d'échange de programme entre enfants, qui fera émerger l'utilité du vocabulaire mathématique pour s'exprimer.
- ***Reproduire*** *: Les élèves disposent d'un objet de l'espace ou du plan et ils doivent en réaliser une copie. Il peut s'agir d'un dessin, d'une maquette en carton, d'une figure simple (rectangle, cercle, …) ou complexe (association des figures simples, …).*
  Il faut préciser ce qu'on entend par « copie » : Elle peut être soit identique à l'original (par exemple, directement superposable pour une figure plane), soit une réduction ou un agrandissement de l'original (propriétés conservées pour les milieux, les perpendiculaires, les parallèles de la forme initiale).
  Pour reproduire, les élèves peuvent utiliser plusieurs types d'instruments que l'on peut autoriser ou interdire selon les connaissances géométriques en jeu : papier calque, papier quadrillé, gabarit, instruments usuels de la géométrie, c'est-`a-dire, règle graduée ou non, compas, équerre, logiciel, …
  Pour valider, l'élève peut comparer sa reproduction au modèle, par exemple, par superposition.
- ***Représenter*** *: Représenter un objet, c'est traduire à l'aide de procédés plus ou moins conventionnels, certaines propriétés géométriques d'un objet géométrique.*
  Toute représentation ne permet pas de mettre en évidence toutes les propriétés ; il faut en négliger certaines. Toute représentation est d´déformante, mutilante : on perd, en représentant, certaines informations. Il y a plusieurs représentations d'un même objet (en perspective cavalière, perspective axonométrique, etc., vue de dessus, etc.). La représentation utilisée dépend du problème que l'on se pose et des caractéristiques de l'objet dont on a besoin.
  Les activités de représentation permettent de mettre en évidence les propriétés des objets géométriques, mais aussi de prendre en compte différents points de vue de l'objet considéré. Il est donc intéressant d'habituer les élèves à effectuer et à utiliser des représentations différentes d'un même objet et donc à savoir choisir la représentation de l'objet qui convient le mieux à la résolution en cours.
- ***Construire*** *: Contrairement à la reproduction, on ne dispose pas du modèle de l'objet. On va ici produire un objet à partir d'un texte descriptif ou d'une liste d'action à mener (programme de construction), à partir d'un schéma, d'un codage, d'une photo (accompagnés ou non par du texte).*

LA GÉOMÉTRIE PLANE

3) Trois types d'espace

Un des objectifs de l'enseignement de la géométrie, est de permettre aux élèves de passer de l'espace vécu à une représentation abstraite des objets. La compréhension de l'espace environnant n'est bien entendu pas uniquement mathématique, mais cette discipline étudie plus particulièrement certaines propriétés des objets et les relations qui les lient (alignement, perpendicularité, parallélisme, positions respectives, etc.) Les mathématiciens distinguent (entre autres !), le plan (dit espace de dimension 2), et l'espace (dit espace de dimension 3) : les plans étant des éléments de l'espace. Les didacticiens distinguent en outre trois types d'espace dans lequel l'élève évolue :

- *Le micro-espace : c'est l'espace accessible par les mains, donc réduit à la dimension de la feuille ou de la table. L'élève est à l'extérieur de cet espace.*
- *Le méso-espace : c'est l'espace accessible visuellement, la salle de classe par exemple. L'élève est à l'intérieur de cet espace et peut agir dessus.*
- *Le macro-espace : c'est l'espace accessible par la pensée. Il faut coordonner différentes informations pour s'en faire une représentation : C'est le quartier, la ville, etc… L'enfant est à l'intérieur de cet espace, mais ne le contrôle pas par ses sens. Il faut donc être capable d'abstraction pour interagir avec cet espace.*

4) Trois temps d'apprentissage en géométrie

Nous prendrons cette fois le point de vue de R. Charnay (1998) lorsqu'il évoque trois temps dans l'apprentissage de la géométrie :

- *Le temps de la géométrie perceptive : La vue de l'objet en question me permet de le classifier dans telle ou telle catégorie : Les carrés avec les carrés, les rectangles avec les rectangles… (début de l'école primaire) Il s'agit essentiellement de reconnaître globalement les objets, de les nommer, de les classer. Dans ce temps d'apprentissage, on distingue le carré du rectangle, car « ils ne se ressemblent pas », et qu'on peut donc les classer dans des classes distinctes.*
- *Le temps de la géométrie instrumentée n : une figure est un carré, car, à l'aide de mes instruments, je peux en vérifier certaines propriétés (fin de l'école primaire). Durant ce temps d'apprentissage, on regardera moins la figure dans sa globalité, que les propriétés liant les objets de la figure.*
- *Ainsi, « je reconnais le rectangle car je peux vérifier (avec l'équerre) qu'il a 4 angles droits. Et lorsque l'on me présente un carré, comme lui aussi a 4 angles droits, je peux le ranger dans la catégorie des rectangles. »*
- *Le temps de la géométrie déductive : cet objet est un carré, car les informations initialement données me permettent de construire à un raisonnement, aboutissant à une preuve mathématique du fait que la figure est carrée (travail surtout réalisé au collège). Lorsque l'on développe ce temps mathématique, on travaille dans un monde d'abstraction : « l'objet physique dessiné sur ma feuille n'est pas un « vrai carré », puisqu'il présente des imperfections. Il n'est que le support perceptif de mon raisonnement, raisonnement que je vais mener à partir des données de l'énoncé*

LA GÉOMÉTRIE PLANE

(appelées aussi « hypothèses). Durant ce temps, je ne peux plus utiliser les instruments pour mesurer sur la figure, puisqu'elle n'est pas la figure « abstraite » sur laquelle je dois mener mon raisonnement. »

5) Erreurs fréquentes des élèves

Nous allons recenser quelques erreurs typiques dans l'apprentissage de la géométrie. Nous espérons aussi attirer ici l'attention du futur professeur des écoles qui pourrait bien, lui aussi produire parfois les mêmes erreurs !

a- Difficultés communes aux problèmes géométriques

1. Difficultés relatives à la connaissance du vocabulaire spécifique à la géométrie : Il est fréquent que les élèves confondent ou utilisent mal le vocabulaire spécifique :

- *Il est parfois difficile pour l'élève de percevoir la distinction entre centre (d'un cercle, d'une figure) et milieu (d'un segment, d'un côté).*
- *Viennent aussi des confusions entre parallèle et perpendiculaire, entre les noms des différents objets du plan et de l'espace (quadrilatère, parallélogramme, prisme, pavé, pyramide…).*
- *Difficulté entre parallèle et horizontal : en effet, la référence est bien souvent la largeur de la feuille, et lorsque l'on trace une paire de droites parallèles, on la fait bien souvent horizontales, laissant ainsi cette représentation chez l'élève.*
- *Confusion rayon/diamètre. Ces erreurs proviennent aussi de l'utilisation de ce vocabulaire dans le vie courante (le milieu d'une pièce, le sommet d'une montagne, …), c'est pourquoi il est si difficile parfois de remédier à ces difficultés.*

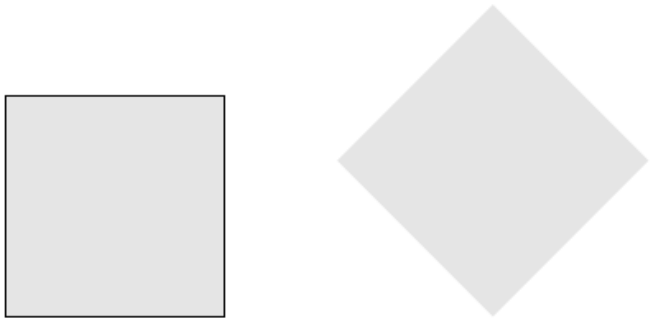
2. Difficultés liées au repérage : Le repérage peut être long à acquérir : intérieur/extérieur, dessus/dessous, devant/derrière… Cependant une difficulté spécifique provient du repérage à ma gauche/à gauche de, à ma droite/à droite de. Ce vocabulaire est travaillé dès la maternelle, mais il faudra ici distinguer selon que l'on demande à l'élève de travailler :

- *Par rapport à soi-même : « à ma droite, à ma gauche ».*
- *Par rapport à autrui : à la gauche de, à la droite de, dans le méso-espace (c'est-`a-dire, en vrai, en salle de motricité, par exemple).*
- *Par rapport à un objet, sur la feuille, auquel cas il faut prendre en compte le fait que la représentation de la feuille n'est pas la réalité, accroissant encore la difficulté de la tâche.*

3. Difficultés à percevoir une figure usuelle, soit dans une figure plus complexe, soit par sa position :

Regardons la figure ci-dessous :

LA GÉOMÉTRIE PLANE



Selon sa position, on aura tendance à la nommer au premier abord comme un carré ou bien comme un losange. Cette difficulté vient de la représentation que l'on se fait : nous reconnaissons une figure comme un carré, non parce que nous avons vérifié à l'œil, la présence de 4 angles droits et de 4 côtés de même longueur, mais bien parce que « cette chose ressemble au carré qui illustre nos livres ». L'´élève devra apprendre à percevoir la conservation des propriétés des objets par déplacement. C'est l'un des enjeux de l'étude de la symétrie axiale. Par ailleurs, il y a pluralité de points de vue sur ces carrés : doit-on le voir comme une surface, comme un contour, comme une forme évidée, comme la réunion de quatre sommets ? Cela dépendra essentiellement du problème posé. L'enseignement de la géométrie doit permettre à l'élève de choisir un point de vue pertinent relativement au problème qu'il doit résoudre, et devenir capable de passer d'un point de vue à un autre, d'un espace `a un autre, d'un type de géométrie à un autre.

Tout ... simplement ! ! !

4. Difficulté à reconnaître ou identifier des propriétés géométriques (parallèles, perpendiculaires, relations entre des figures) :

On peut argumenter cette difficulté au regard des deux précédentes : pourquoi vérifier ou savoir que notre figure possède 4 angles droits, puisque, de toute manière, « on le voit » ! Par ailleurs, dans une figure complexe, les relations entre les figures élémentaires qui la composent ne sont pas toujours aisément perceptibles (si les segments ne sont pas en position verticale et horizontale la perpendicularité apparaît moins bien, l'alignement de points n'est pas toujours visible s'ils ne sont pas reliés, etc.) Tout l'enjeu de l'enseignement de la géométrie au cycle 3, et plus particulièrement au CM2, est de permettre à l'élève de passer de l'observation qui utilise les sens et la connaissance du vocabulaire relatif à ce qui est observé, à l'étude, qui utilise en plus les capacités d'analyse, de réflexion et les compétences liées aux instruments de géométrie, aux propriétés des objets géométriques et de passer ainsi des dessins aux figures. L'élève doit donc apprendre à passer de la manipulation d'objets concrets à la pensée de ces objets sans pour autant les manipuler ou les voir (le point d'intersection entre deux droites n'est pas toujours sur la feuille, les solides sont représentés en dimension 2 avec des faces cachées).

5. Difficultés de manipulation des instruments de géométrie :

Elles provoquent des constructions imprécises ou des mesurages incorrects.

Les plus classiques sont :

- *Positionnement du bord de la règle à l'extrémité d'un segment, au lieu de la graduation* 0.

LA GÉOMÉTRIE PLANE

- *Marquage de l'angle droit à l'aide du coin de l'équerre au lieu de positionner l'équerre et la règle bord à bord, puis d'ôter l'équerre pour tracer avec la règle.*

b- Difficultés spécifiques liées à la symétrie

Certains élèves ne reconnaissent que les axes verticaux, et en second lieu horizontaux et ne perçoivent pas les axes obliques. Le tracé du symétrique d'une figure donne souvent lieu à des erreurs lorsque les segments ne suivent pas les lignes du quadrillage, les élèves confondant translation et symétrie (ils conservent l'orientation de l'angle au lieu de l'inverser). Certains élèves comptent le nombre de carreaux séparant le bord de la feuille des points de la figure, et reportent cette longueur soit de l'autre côté de l'axe, soit à l'autre bord de la feuille. Cette erreur n'apparaît que si l'élève rencontre une figure ou un axe décentré par rapport à la feuille.

6) Principales variables didactiques

a- Figures planes

Les variables les plus courantes sont :

- *La nature de l'espace : dimension 2 ou 3, sa taille micro / méso / macro.*
- *La nature des objets : réels ou représentés, déplaçables ou non.*
- *La nature des figures : figures élémentaires ou assemblages complexes.*
- *La visibilité des relations entre les figures.*
- *La position des figures sur la feuille (horizontale ou non, etc.).*
- *La chronologie des tracés : importante ou non.*
- *Les supports proposés : papier quadrillé, pointé, blanc, calque.*
- *Les instruments à disposition.*

Evidemment, cette liste n'est pas exhaustive !

b- Symétrie axiale

Concernant la symétrie, les variables didactiques les plus fréquentes sont :

- *La position de l'axe : horizontal, vertical, oblique, au centre de la feuille.*
- *Le support : papier blanc ou quadrillé, calque, taille du quadrillage.*
- *La position de la figure sur la feuille : segments mesurant un nombre entier de carreaux si quadrillage, forme d'un seul côté de l'axe ou non, formes connues (carrés, triangles, dessin comme un bateau ou une maison) ou pas.*
- *Les instruments utilisés.*

LA GÉOMÉTRIE PLANE

c- Agrandissement/Réduction

Au cycle 3, on abordera aussi la notion d'agrandissement et de réduction.
Rappelons qu'agrandir (respectivement réduire) une figure, c'est multiplier toutes ses longueurs par un même nombre k, avec $k > 1$ (respectivement $k < 1$).
La transformation mathématique correspondant à un agrandissement ou une réduction de rapport k est une homothétie de rapport k. Ainsi, les élèves doivent être capables de :

- *Réaliser, dans des cas simples, des agrandissements ou des réductions de figures planes.*
- *Contrôler si une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure.*

Ce thème est généralement lié à celui de la proportionnalité et peut conduire à la notion d'´échelle. Les dimensions des figures d'origine et après transformations sont en effet proportionnelles. De même pour contrôler un agrandissement, l'élève devra vérifier la proportionnalité des dimensions. Rappelons aux étourdis que quand on multiplie les dimensions par, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3. Les angles, le parallélisme, la perpendicularité et les milieux sont conservés.
Citons enfin quelques variables didactiques :

- *La forme de la figure (formes connues ou bizarres, puzzle, …).*
- *La valeur du coefficient d'agrandissement ou de transformation (entier ou non, inférieur ou supérieur à un).*

7) Ce que disent les programmes

a- En cycle 2

Attendus de fin de cycle 2	Repères de progressivité
Se repérer et se déplacer en utilisant des repères	
Se repérer dans son environnement proche. Situer des objets ou des personnes les uns par rapport aux autres ou à d'autres repères. Vocabulaire permettant de définir des positions (gauche, droite, au-dessus, en dessous, sur, sous, devant, derrière, près, loin, premier plan, second plan, nord, sud, est, ouest…). *Vocabulaire permettant de définir des déplacements (avancer, reculer, tourner à droite/à gauche, monter, descendre…). Produire des représentations des espaces familiers (les espaces scolaires extérieurs proches, le village, le quartier) et moins familiers (vécus lors de sorties).* *Quelques modes de représentation de l'espace. S'orienter et se déplacer en utilisant des repères. Coder et décoder*	*Au CP, la représentation des lieux et le codage des déplacements se situent dans la classe ou dans l'école, puis dans le quartier proche, et au CE2 dans un quartier étendu ou le village.* *Dès le CE1, les élèves peuvent coder des déplacements à l'aide d'un logiciel de programmation adapte, ce qui les amènera au CE2 à la compréhension, et la production d'algorithmes simples.*

LA GÉOMÉTRIE PLANE

pour prévoir, représenter et réaliser des déplacements dans des espaces familiers, sur un quadrillage, sur un écran. Repères spatiaux et relations entre l'espace dans lequel on se déplace et ses représentations.	
Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques. *Reconnaître et utiliser les notions d'alignement, d'angle droit, d'égalité de longueurs, de milieu, de symétrie*	
Décrire, reproduire des figures ou des assemblages de figures planes sur papier quadrille ou uni. Utiliser la règle, le compas ou l'équerre comme instruments de tracé. Reconnaître, nommer les figures usuelles. *Reconnaître et décrire à partir des côtés et des angles droits, un carré, un rectangle, un triangle rectangle. Les construire sur un support uni connaissant la longueur des côtés.* *Construire un cercle connaissant son centre et un point, ou son centre et son rayon. Vocabulaire approprie pour décrire les figures planes usuelles : carre, rectangle, triangle, triangle rectangle, polygone, cot^ e, sommet, angle droit, cercle, disque, rayon, centre, segment, milieu d'un segment, droite.* *Lien entre propriétés géométriques et instruments de trace : droite, alignement et règle non graduée, angle droit et équerre, cercle et compas.* *Propriété des angles et égalités de longueur des côtés pour les carrés et les rectangles. Angle droit. Egalité de longueurs. Milieu d'un segment. Reconnaître si une figure présente un axe de symétrie (à trouver). Compléter une figure pour qu'elle soit symétrique par rapport à un axe donné. Symétrie axiale. Une figure décalquée puis retournée qui coïncide avec la figure initiale est symétrique : elle a un axe de symétrie (à trouver). Une figure symétrique pliée sur son axe de symétrie, se partage en deux parties qui coïncident exactement.*	*Les propriétés géométriques sont engagées progressivement dans la reproduction et la description de figures (alignement, report de longueur sur une droite et égalités de longueur en début de cycle, puis angle droit en milieu de cycle).* *On aborde la construction d'un cercle sans contraintes au CE1 ; puis à partir du centre ` et d'un point de son rayon et son centre, et, au CE2, de son diamètre.* *L'utilisation des instruments se fait graduellement : règle non graduée, outil de report de longueur sur une droite dès le CP ; puis règle graduée, gabarit d'angle droit ; enfin, équerre, compas pour tracer des cercles.* *Le report de longueurs sur une droite déjà tracée avec le compas peut être abordé au CE2 mais il relevé surtout du cycle 3.*

b- En cycle 3

Attendus de fin de cycle 3	Repères de progressivité
Se repérer et se déplacer en utilisant des repères	
Se repérer, décrire ou exécuter des déplacements, sur un plan ou sur une carte. *Accomplir, décrire, coder des déplacements dans des espaces familiers. Programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran.*	*Initiation à la programmation.* *Une initiation à la programmation est faite à l'occasion notamment d'activités de repérage ou de déplacement*

LA GÉOMÉTRIE PLANE

Vocabulaire permettant de définir des positions et des déplacements. Divers modes de représentation de l'espace.	*(programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran)*
Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire (quelques solides et) figures géométriques.	
Reconnaître, nommer, comparer, vérifier, décrire : *Des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) : Figures planes, premières caractérisations, triangles dont les triangles particuliers (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral), quadrilatères dont les quadrilatères particulier (carré, rectangle, losange, première approche du parallélogramme), cercle (comme ensemble des points situes à une distance donnée d'un point donné).* *Des figures simples ou complexes (assemblage de figures simples). Réaliser, compléter et rédiger un programme de construction. Réaliser une figure simple ou une figure composée de figures simples à l'aide d'un logiciel.*	*Les gestes de géométrie :* *Tracer un segment d'une longueur donnée ou reporter la longueur d'un segment (CM1 - CM2) ou encore reproduire un angle (6ème).* *L'évolution des procédures et des connaissances mobilisées. L'élève doit savoir reconnaître la perpendicularité en prenant en compte les angles droits et l'égalité des mesures de ses côtés es (CM 1-CM 2) puis progressivement démontrer qu'il s'agit d'un carré à partir des propriétés de ses diagonales ou de ses axes de symétrie (6ème).*