LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Première partie

L'addition

1) Aspect théorique

La technique usuelle est basée sur les principes de notre système de numération.
En effet, une fois les deux termes de l'addition donnés on utilise un algorithme « rang à rang » et pour chaque rang, on additionne les chiffres (ici, au rang 0 : 4+8). Deux cas peuvent se produire :

- *Si la somme est strictement inférieure à 10, on pose la somme trouvée, au même rang que les termes utilisés.*
- *Si la somme obtenue est supérieure à dix unités (c'est le cas ici : 12), on échange les dix unités contre une dizaine et on pose la somme restante (on pose 2). La dizaine est alors ajoutée aux chiffres du rang supérieur ((1) + 9 + 2).*

On reprend l'algorithme au rang suivant, jusqu'à ce que tous les rangs soient traités.

Ainsi donc, dans la technique posée, il convient d'aligner les chiffres de même rang, afin d'automatiser les sommes partielles termes à termes. Les retenues correspondent à ces dizaines obtenues à un rang N qui, écrites au rang $N + 1$ sont vues comme des unités :
Je peux lire « 20 » comme « vingt unités » ou « 2 dizaines ».

Exemple :

$$\begin{array}{rccc} & 3^{1} & 9^{1} & 4 \\ + & 5 & 3 & 8 \\ \hline & 9 & 3 & 2 \end{array}$$

2) Aspect didactique

a- Les différentes procédures personnelles

Commençons par rappeler que les programmes indiquent : « qu'il est souhaitable que les écritures $a + b$ et $a - b$ soient, dès le départ, travaillées simultanément pour éviter que l'écriture $a + b$ ne soit utilisée de façon automatique, car étant la seule disponible ».

On peut globalement distinguer deux grandes catégories de procédures :

- *Procédures basées sur une « représentation figurative » de la situation.*

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Elles recourent le plus souvent au dénombrement ou au comptage. Elles utilisent les dessins, les schémas, les doigts, les résultats mémorisés.

- *Procédures basées sur « une représentation mathématique » de la situation.*

Elles recourent le plus souvent aux nombres et au calcul. Pour les mettre en œuvre, l'élève doit avoir mémorisé un certain nombre de résultats, avoir de bonnes connaissances en numération et reconnaître l'opération en jeu.

Les élèves utiliseront aussi en actes les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition. L'utilisation des écritures additives ou soustractives sert à rédiger une solution, expliquer une démarche, garder des traces écrites, écrire un répertoire, utiliser une calculatrice.

b- Erreurs prototypiques

Effectuons l'opération $A + B$, avec A et B entiers.
Par exemple, $27 + 38$, et listons les différentes erreurs prototypiques :

- *Alignement des chiffres : si l'élève n'aligne pas les chiffres de même valeur dans son opération en colonne, il peut ajouter ensemble des chiffres de rangs différents.*
- *Méconnaissance des tables d'addition : l'élève a compris la technique mais n'a pas mémorisé correctement les tables d'addition.*
- *Erreurs liées à la retenue : ces erreurs sont liées à une mauvaise compréhension de la technique opératoire. On peut citer plusieurs types d'erreurs :*
  - *Mauvais choix de ce qu'est la retenue : $7 + 8 = 15$, l'élève pose 1 retient 5.*
  - *Non gestion de la retenue : l'élève pose le 5, et ne retient pas le 1.*
  - *Accolement des résultats partiels : 27+38 est égal à 5 dizaines et 15 unités, que l'élève écrit 515.*
  - *Lorsqu'il y a plus de termes dans la somme, certains élèves considèrent cependant que la retenue est toujours 1.*
- *Calcul effectué de gauche à droite : cette erreur est à prendre en compte dès le début de l'apprentissage, en effet, si l'enseignant commence par ne proposer que des additions sans retenue, l'ordre dans lequel le calcul est effectué n'a pas d'importance, d'où la mise en place d'une procédure qui s'avérera ensuite erronée chez l'élève. Exemple : 52 + 74 « = » 12 dizaines et 6 unités. L'élève pose alors le 2 et retient le 1, qu'il ajoute aux 6 unités, ce qu'il écrit 27.*

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Deuxième partie

La soustraction

Il existe plusieurs techniques opératoires. Nous allons ici en décrire trois, les plus fréquemment utilisées actuellement. On pourra pour plus de renseignements consulter le document d'accompagnement « le nombre au cycle 2 » sur le site Eduscol.

1) Les différentes techniques opératoires

a- La technique traditionnelle

C'est celle que nous avons apprise étant petits.

Exemple : $117 - 38 = 79$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1^{1} & 7^{1} \\ + & {\scriptstyle 1} & 3_{1} & 8 \\ \hline & & 7 & 9 \end{array}$$

La méthode dit : 8 ôté de 7, impossible. Je mets une retenue en haut, et pour compenser, une retenue en bas. Ensuite, je calcule 17 – 8 qui donne 9. La retenue du bas s'ajoute au 3 des dizaines du nombre du bas. 4 ôté de 1 impossible. Je mets une retenue en haut, une retenue en bas. Je calcule 11 – 4 = 7. Enfin, aux centaines, 1 – 1 donne 0. Le résultat est donc 79.
Avec le recul, cette technique pose souvent problème aux élèves. En effet, les retenues du haut sont des chiffres (quand 7 devient 17) et celles du bas sont des nombres (on calcule 4 + 1). Il ne s'agit donc pas à proprement parler de retenues.
Il est aussi difficile de donner du sens à cette technique. Cette technique repose en fait sur une propriété difficile pour les élèves :

La formule :

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

Le nombre c désignant ce qu'on a appelé retenue (par abus de langage). Cette propriété ne sera évidemment pas enseignée ainsi, mais sera utilisée en actes. Eventuellement, on peut la présenter comme la reproduction du phénomène de la balance à l'équilibre : ajouter c au plateau contenant a obligé pour maintenir l'équilibre, à ajouter c sur le plateau contenant b.

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

b- La technique naturelle

Exemple : 117-38 = 79

$$\begin{array}{rrr} & 10 & \\ & \cancel{0} & 7^{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{7} \\ - & 3 & 8 \\ \hline & 7 & 9 \end{array}$$

Cette fois, la méthode dit : 7 ôté de huit, impossible. On « casse » donc une dizaine, qui donne 10 unités. Il suffit donc de barrer le 1 des dizaines de 117, les unités deviennent 17 (7 + 10), et les dizaines 0 (1 - 1). On calcule 17 - 8 = 9 et aux dizaines 0 - 3 est impossible. On recommence : on « casse » une centaine, il en reste donc 0 (on ne l'écrit pas nécessairement), et on a maintenant 10 dizaines de plus. 0 + 10 dizaines, auxquelles on ôte 3 dizaines donne 7. Le résultat est donc 79.
Cette technique est plus simple à comprendre que la précédente, car elle repose uniquement sur le fait que 1 centaine = 10 dizaines, et 1 dizaine = 10 unités. De plus, on modifie uniquement le nombre du haut, sans toucher à celui du bas, ce qui est source de moins d'erreurs pour les élèves que la technique traditionnelle. Par contre, les ratures rendent l'opération vraiment moche…

c- La technique de l'addition à trous

Au début de l'apprentissage, ou suivant la présentation du problème, les élèves calculent ce qu'on appelle une « addition à trou », le principe étant le suivant :

Exemple : 117- 38 = 79

$$\begin{array}{rrr} & 3 & 8 \\ + & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline & 1 & 1 & 7 \end{array}$$

On raisonne ainsi : de 8 pour aller à 7, impossible. De 8 pour aller à 17, il faut 9. On écrit donc 9 aux unités, et l'addition donnera donc une retenue aux dizaines. 3 + 1 = 4, il faut donc 7 pour aller à 11. Le résultat est donc 79.
Cette technique est simple sur le plan calculatoire, mais pour l'utiliser, les élèves doivent avoir compris l'équivalence entre la soustraction et la recherche d'un complément :

$$a - b = c \Leftrightarrow b + c = a.$$

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

2) Les erreurs prototypiques

On choisit ici de considérer les écueils possibles face à la technique traditionnelle :

- *Alignement des chiffres.*
- *Méconnaissance des tables d'addition.*
- *Erreurs liées à la retenue : la plus fréquente est d'écrire la retenue au nombre du haut, sans la reporter au nombre du bas.*
- *Calcul effectué « grand – petit », rang à rang :*
  Exemple : Combien font 142–63 ? L'élève se dit 2 – 3, impossible, et calcule à la place 3 – 2 = 1. Puis 4 – 6, impossible, il calcule donc 6 – 4 = 2 et trouve 142 – 63 = 121.
- *Calcul effectué de gauche à droite : cette erreur n'est, là encore, pas détectable quand il n'y a pas de retenue.*

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Troisième partie

La multiplication

1) Définition et premières propriétés

a- Quelle définition ?

Définition : *Par additions réitérées. Soient deux entiers a et b. On définit la multiplication :*

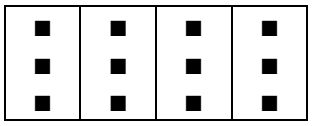
$$a \times b = b + b + ___ + b, a \text{ termes } b.$$
$$b \times a = a + a + ___ + a, b \text{ termes } a.$$

La définition de la multiplication ne permet pas de prendre en compte naturellement la commutativité de l'opération. Les définitions alternatives rencontrées parfois (Sur Wikipédia, par exemple !) proposent :

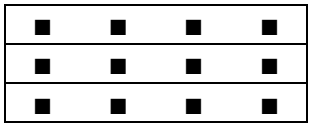
$$a \times b = b \times a = b + b + ___ + b = a = a + a + ___ + a$$

Mais ceci rend compliqué, d'une part, l'application d'une « technique d'écriture » pour les élèves et d'autre part, de donner un sens concret au terme « multiplié », ou « fois ».

Définition : *Par quadrillage. Soient deux entiers a et b. Le produit $a \times b$ définit le nombre de carreaux d'un rectangle de dimensions des côtés a et b. Ce qui permet de visualiser, notamment, deux « manières » de dénombrement :*



Possède le même nombre de carrés que



LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Remarquons aussi que cette définition ouvre à des valeurs de a et de b qui seront non entières, puisqu'une fois définie l'unité d'aire, ce produit correspond à l'aire d'un rectangle de dimension a et b, pour des valeurs de a et de b, réelles.

b- Premières propriétés

 # 1 : La multiplication possède les propriétés suivantes :

- ***Associativité :*** $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- ***Commutativité :*** $a \times b = b \times a$
- ***Élément neutre :*** $a \times 1 = a$
- ***Élément absorbant :*** $a \times 0 = 0$
- ***Distributivité par rapport à l'addition :*** $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Remarque : On rappelle qu'en l'absence de parenthèses, c'est la multiplication que l'on effectue d'abord (se référer à la leçon N°1).

 # 2 : (Règle des zéros). Pour un entier a, on a :

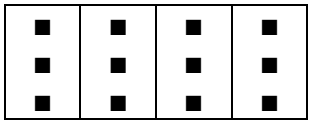
$$a \times 10^n = \overline{a00\ldots0}\ (n \text{ zéros}).$$

La règle des zéros n'est pas une propriété de la multiplication à proprement parler, mais une propriété de notre système de numération et du rôle de la dizaine dans les groupements.

Exemple : En partant de la décomposition canonique en base 10 d'un nombre à trois chiffres, montrons la règle des zéros : pour un entier N de trois chiffres, écrit $N = \overline{cdu}$, on calcule :

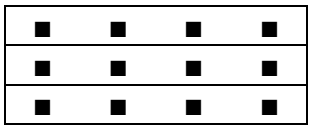
$$10N = 10 \times \overline{cdu} = 10 \times (100c + 10d + u) = 1000c + 100d + 10u = \overline{cdu0}$$

Remarque : Il est très difficile d'illustrer la propriété de commutativité. En effet, comment expliquer que 4+4+4 = 3+3+3+3 ?
Ou encore, pourquoi 3 kg de viande à 4 € le kg coûtent le même prix que 4 kg de viande à 3 € le kg ? On peut l'expliquer par les réseaux de points (ou les tablettes de chocolat…) :

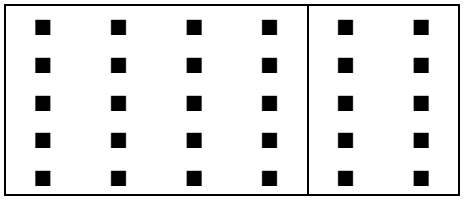


Possède le même nombre de carrés que

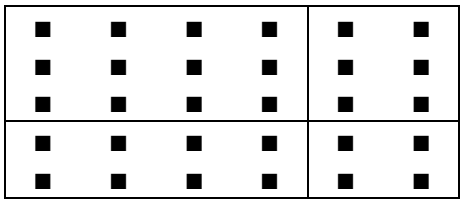
LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES



En comptant selon les cases faites, le 1er découpage donne 3 + 3 + 3 + 3 et le 2nd donne 4 + 4 + 4.
De la même manière, on peut illustrer les autres propriétés, notamment la distributivité.
Exemple, ici pour avoir $5 \times (4 + 2) = 5 \times 4 + 5 \times 2$ *:*



Plus difficile, illustrons que $(3 + 2) \times (4 + 2) = 3 \times 4 + 3 \times 2 + 2 \times 4 + 2 \times 2$ *:*



c- La table de Pythagore

Mise en place pour lire les tables de multiplications, on a pu voir qu'elle présentait un certain nombre de propriétés, à faire découvrir aux élèves.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Exemples de faits numériques à faire constater à partir de cette table :

- *Symétrie du tableau par rapport à sa diagonale : commutativité mise en avant ;*
- *Les lignes (ou colonnes) de produit par un nombre pair donne des produits pairs ;*
- *Il est possible de dénombrer les carreaux pour trouver le produit des deux nombres en ligne et colonne ;*
- *Si l'on considère un carré de 4 cases consécutives, les produits diagonaux sont égaux :* $21 \times 32 = 24 \times 28.$

2) Les procédures personnelles et le sens de l'opération

On peut voir deux grands sens pour la multiplication d'entiers :

- *Nombre total d'objets obtenus par la réunion ou l'itération de plusieurs quantités identiques.*
- *Nombre total d'objets organisés en rangées régulières.*

Ces deux approches reprennent les définitions que nous avions pu voir de la multiplication.

La résolution de problèmes multiplicatifs par des procédures personnelles permet de donner du sens à cette opération. On pourra alors rencontrer des procédures personnelles basées :

- *Sur la schématisation ;*
- *Sur l'addition réitérée ;*
- *Sur la décomposition des nombres (canonique ou non).*

Pour construire la technique opératoire de la multiplication, on va faire appel :

- *Au calcul automatisé (repose sur la mémorisation des résultats des tables).*
- *A la connaissance de faits numériques (comme la multiplication par* $10n$*).*
- *A la connaissance de la technique de calcul posé d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre.*
- *Tout cela, s'appuyant sur les propriétés de la multiplication.*

3) La technique

Nous présentons ici la technique opératoire à retenue, elle est basée sur la décomposition d'un nombre en puissances de 10 ainsi que les propriétés de la multiplication. L'apprentissage se fait en deux temps :

a- Multiplication par un nombre à un chiffre

On veut calculer $37 \times 8.$ *A partir des propriétés vues pour la multiplication, nous pouvons établir une technique, que nous explicitons ici, étape par étape, puis que nous reprenons en colonnes.*

Leçon de mathématique

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Exemple : Calculons 37×8.

On décompose tout d'abord 37 additivement en $(30 + 7)$

$$37 \times 8 = (30 + 7) \times 8$$

On utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$37 \times 8 = (30 + 7) \times 8 = 30 \times 8 + 7 \times 8$$

On décompose cette fois multiplicativement 30 *en* $30 = 10 \times 3$ et on utilise l'associativité de la multiplication :

$$30 \times 8 = (10 \times 3) \times 8 = 10 \times (3 \times 8)$$

On se sert alors des produits mémorisés :

$$37 \times 8 = 10 \times (3 \times 8) + 7 \times 8 = 10 \times 24 + 56$$

On utilise la règle des zéros : $10 \times 24 = 240$ On termine par la somme :

$$37 \times 8 = 240 + 56 = 296$$

On peut reprendre ces étapes, en les posant en colonne

Technique intermédiaire : Calculons 37×8.

	3	7	
×		8	
	5	6	Produit 7 x 8
2	4	0	Règle de zéro et produit 3 x 8
2	9	6	Résultat

Technique experte : Calculons 37×8.

$$\begin{array}{rrr} & 3^{5} & 7 \\ \times & & 8 \\ \hline 2 & 9 & 6 \end{array}$$

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Dans la technique experte, le produit : $8 \times 7 = 56$ *se fait de tête, on pose 6 et je retiens 5.*
$8 \times 3 = 24$*, auquel j'ajoute ma retenue, cela fait* 29 *et donc* 296.

b- Multiplication par un entier quelconque.

La technique est assez similaire à la technique précédente, simplement cette fois, ce n'est plus le multiplicande que l'on décompose mais le multiplicateur :*

Exemple :

Technique experte : Calculons 37×68.

		4		La retenue du produit 6 x 7
		3^5	7	La retenue du produit 8 x 7
×		6	8	
	2	9	6	Le produit 37 x 8
2	2	2	0	Le produit de 37 x 6 x 10
2	5	1	6	Le produit recherché

Bien entendu, si l'on multipliait par un nombre à trois chiffres, il faudrait faire une ligne supplémentaire en ajoutant deux zéros pour matérialiser la centaine, etc…

4) Les erreurs prototypiques

- *Méconnaissance des tables de multiplication, ou d'addition.*
- *Calcul effectué rang à rang : Dans* 37×68 *par exemple, l'élève calcule* 7×8 *et* 3×6*, qu'il ajoute (ou variante : il décale en considérant non pas* 3×6 *mais* 3×60*)*
- *Mauvais décalage, par exemple les unités sont décalées au lieu des dizaines, ou seulement les dizaines sont décalées et pas les centaines, ou les centaines ne sont décalées qu'une fois etc…*
- *Erreurs de retenue :*
  - *Mauvais choix de retenue :* $3 \times 5 = 15$*, l'élève pose 1 et je retiens 5.*
  - *Non gestion de la retenue, l'élève oublie de poser le 1.*
  - *Accolement des résultats partiels :* $35 \times 8 = 24$ *dizaines et* 40 *unités et l'élève écrit* 2440.
  - *Ajout de la retenue avant de multiplier : L'élève fait* $(3 + 4) \times 8$ *au lieu de* $3 \times 8 + 4$ *(ce qui rappelle au passage l'importance des parenthèses et du respect de l'ordre des calculs).*

**Multiplicande : Dans une multiplication, c'est celui des facteurs qui est énoncé le premier.*

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Quatrième partie

La division euclidienne

1) Définition

Rappelons la définition vue aux deux précédents chapitres :

***Théorème** : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers (q, r), tel que :*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

Effectuer la division euclidienne, c'est trouver cet unique couple. On dit que a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste dans la division euclidienne.
Cette relation peut se mettre aussi sous la forme :

***# 1** : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Il existe un unique entier q tel que*

$$bq \leq a < b(q + 1)$$

2) La technique

On veut effectuer la division euclidienne de a par $b \neq 0$ (des entiers !), et trouver le quotient q et le reste r.
Prenons un exemple pour illustrer la méthode : Calculons $1280 \div 24$.
*Nous allons faire apparaitre des étapes intermédiaires dont on pourra se passer sous la forme la plus experte : ces étapes sont précédées d'un * Les principales étapes à la réalisation de la technique opératoire de la division, que l'on nomme algorithme de la division euclidienne sont :*

1. *Recherche du nombre de chiffres du quotient *.*

On encadre le dividende a par des multiples du diviseur b. Pour être plus précis, on cherche n tel que :

$$b \times 10^n \leq a \leq b \times 10^{n+1}$$

Alors, le nombre de chiffres du quotient est de $n + 1$.
On a $240 \leq 1280 \leq 2400$. Donc le quotient est un nombre à deux chiffres $(2400 = 24 \times 10^2)$.

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

2. **Création du répertoire multiplicatif du diviseur*.**

En bref, on écrit la table de multiplication du diviseur pour l'avoir sous les yeux. Ici,

$$\begin{array}{lll} 24\times 1 = 24 & 24\times 4 = 96 & 24\times 7 = 168 \\ 24\times 2 = 48 & 24\times 5 = 120 & 24\times 8 = 192 \\ 24\times 3 = 72 & 24\times 6 = 144 & 24\times 9 = 216 \end{array}$$

3. **Création d'un tableau de numération ***

Dizaines	Unités
■	■

4. **Recherche du premier chiffre du quotient :**

En déterminant un dividende partiel et s'aidant du répertoire multiplicatif pour effectuer la division euclidienne de ce dividende partiel par le diviseur. Le premier dividende partiel est 128 et le chiffre des dizaines du quotient est 5 car en utilisant le répertoire multiplicatif on voit que

$$24\times 50 < 1280 < 24\times 60.$$

$$\begin{array}{r|l} 128\ 0 & 24 \\ \hline 120 & 5 \end{array}$$

Le tableau de numération devient alors :

Dizaines	Unités
5	■

On voit que ce tableau permet à l'élève d'identifier qu'il effectue le produit $5\times 20\times 10$, *puisque 5 est en position de dizaines (que l'on voit aussi sur l'inégalité écrite plus haut).*

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

5. *Soustraction du premier multiple du diviseur au dividende partiel :*

	1	2	8	0	24
–	1	2	0	0	5
			8	0	

6. *Création du nouveau dividende partiel, en « abaissant le chiffre suivant » dans le dividende.*

Ici le dividende partiel est 80.

7. *Réitération de la recherche du chiffre du quotient (étape 4), jusqu'à ce que le reste soit plus petit que le diviseur…*

	1	2	8	0	24
–	1	2	0	0	53
			8	0	
		–	7	2	
				8	

3) Histoires de fleurs…

Cherchons les procédures possibles de résolution de problèmes de division.
Pour plus de clarté nous allons illustrer le propos qui suit par un problème relevant de la division. Prenons donc maintenant une histoire de fleuriste, qui dispose de n fleurs, qui veut faire p bouquets de f fleurs chacun. Nous donnerons à n, p, f des valeurs bien choisies, en fonction du niveau des élèves que nous allons évoquer. On parle dans ce cas de variables didactiques : selon les valeurs de n, p, f , l'élève devra choisir une procédure plutôt qu'une autre. Partons donc de la situation suivante :
La fleuriste dispose de n fleurs, elle veut faire des bouquets de f fleurs. Combien de bouquets peut-elle faire, de manière à ce qu'elle utilise le plus de fleurs possibles ?

a- En maternelle

Il y a deux procédures principales :

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

- *La première va consister à manipuler les objets et à réaliser effectivement le partage, soit avec les objets de la situation, soit avec des objets représentant la collection (comme des bûchettes ou des dessins de fleurs).*
- *Dès la grande section, l'élève pourra avoir recours à la représentation des objets (il lui faudra dessiner lui-même les fleurs puis les entourer par tas de f , formant un bouquet) puis, avec un degré supérieur d'abstraction, il pourra schématiser le problème (il sera capable d'identifier un bâton pour une fleur). Après le dessin, il les entoure par paquets de f . Ensuite pour répondre, il utilise le dénombrement : combien de bouquets a-t-il fabriqués ?*

On voit que pour ce type de problème, le nombre n de fleurs ne doit pas dépasser 20 et le nombre f de fleurs par bouquets se situer autour de 4 à 5.
Il faut reprendre le cours sur les nombres et se souvenir qu'en maternelle, les élèves ne peuvent guère compter au-delà de 30. Les erreurs sont ici souvent liées au dénombrement ou à l'organisation du schéma.

b- En cycle 2

Ayant à sa disposition l'addition puis la soustraction, l'élève pourra avoir recours à :

- *L'addition réitérée du diviseur jusqu'à approcher le plus possible le dividende par défaut (c'est-à-dire sans le dépasser), ou,*
- *La soustraction réitérée du diviseur au dividende, jusqu'à ne plus pouvoir (c'est à dire obtenir une soustraction ayant un résultat négatif).*

Pour que l'addition réitérée ne soit pas trop coûteuse, il faut que les données soient telles que le quotient recherché soit autour de la dizaine. Le dividende ne doit pas excéder 3 chiffres, afin que les nombres gardent du sens chez les élèves.
On va prendre dans notre exemple, des bouquets de 12 fleurs avec 70 fleurs. Il ne faut pas négliger ici des difficultés provenant de l'organisation du calcul.
Supposons maintenant que l'on demande de trouver le nombre de bouquets de 7 fleurs, avec 453 fleurs. L'addition (ou la soustraction) réitérée devient alors inefficace car trop coûteuse en temps.

c- En cycle 3

Apparaîtront les procédures utilisant la multiplication, comme la recherche d'un multiple du diviseur le plus proche du dividende, par défaut, par essais successifs.

On voit ici l'utilité d'avoir une idée de l'ordre de grandeur du quotient recherché. Reprenons les données précédentes : 453 fleurs par bouquets de 7. Si nous commençons à écrire tous les multiples de 7, dans l'ordre, cela va mettre un certain temps !

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Exemple : Utilisons la méthode des multiples du diviseur pour trouver le quotient et le reste :
Je sais que $6 \times 7 = 42$, donc $60 \times 7 = 420$: j'ai donc au moins 60 bouquets, mais je peux faire mieux.
$70 \times 7 = 490$, cette fois, c'est trop. Je peux faire entre 60 et 70 bouquets :
$65 \times 7 = 60 \times 7 + 5 \times 7 = 420 + 35 = 455$ C'est trop, mais de peu.
$64 \times 7 = 455 - 7 = 448$
La fleuriste peut faire 64 bouquets et il lui reste $453 - 448 = 5$ fleurs.

Apparaîtront enfin des procédures « mixtes » basées sur le retrait au dividende d'un multiple du diviseur C'est cette méthode qui est à l'origine de la technique opératoire. En effet, pour minimiser le nombre d'essais pour la recherche du quotient, l'idéal est de déterminer des multiples du diviseur de la forme $d \times 10n$, qui encadrent le dividende.

Exemple : Utilisons cette technique pour trouver le quotient et le reste :
La fleuriste a 453 fleurs et veut faire des bouquets de 7 fleurs.
$70 < 453 < 700$: On voit alors que l'on peut faire au moins 10 bouquets, mais pas 100. On peut donc en déduire que le quotient que l'on cherche est un nombre à deux chiffres (car il est plus grand que 10, mais plus petit ou égal à 99).
On va chercher combien de dizaines de bouquets sont réalisables :
$420 < 453 < 490$: On peut faire 60 bouquets, mais pas 70.
On retire alors ces 60 bouquets. Il reste $453 - 420 = 33$ fleurs.
Et chacun connaissant sa table des 7, on a : $28 < 33 < 35$.
On peut encore faire 4 bouquets, mais pas 5. Il reste alors : $33 - 28 = 5$ fleurs. On a effectué au total $60 + 4 = 64$ bouquets.

d- Deux types de problèmes concrets

On peut voir dans les programmes que l'on demande aux élèves de savoir résoudre deux types de problèmes liés à la division :

1. ***Le premier type de problèmes est la division-partition. On recherche la valeur d'une part, comme c'est le cas lors d'un partage :***
   Notre fleuriste dispose de 100 fleurs et souhaite faire 20 bouquets, tous de même taille. Combien doit-elle mettre de fleurs par bouquet ?
   Nous connaissons le nombre de parts (20), mais nous ignorons la valeur de la part (taille du bouquet). Nous avons un problème de division-partition.
   La procédure la plus simple dans ce cas est de répartir les fleurs une par une, sur 20 tas. Lorsque la distribution équitable sera achevée, la fleuriste aura des bouquets de taille identique.

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Une procédure de résolution est l'utilisation de multiples du diviseur.

2. *Le second type de problèmes est la division-quotition.*
   On va cette fois rechercher le nombre de parts :
   La fleuriste dispose de 100 fleurs et souhaite faire des bouquets tous de même taille, composés chacun de 5 fleurs. Combien peut-elle faire de bouquets ?
   Nous sommes dans le cas où nous connaissons la valeur de la part (5) et nous recherchons le nombre de parts (nombre de bouquets à composer).
   Nous avons un problème de division-quotition. On voit ici que pour se représenter le problème, on doit « faire des tas de 5 ».

4) Les erreurs prototypiques

Nous citons les erreurs en reprenant la liste des taches à effectuer lors de l'algorithme.

- *Erreurs liées à une mauvaise utilisation du tableau de numération :*
  - *L'élève ne trouve pas utile de faire ce travail supplémentaire et donc créer le tableau de numération après avoir fini sa division, autour des chiffres trouvés au quotient. Le tableau ne sert donc plus de vérification.*
  - *L'élève effectue correctement sa recherche du nombre de chiffres au quotient, crée un tableau de numération correct, mais se trompe dans sa division, oubliant couramment un* 0 *intermédiaire au quotient.*

  Dans ce cas, une case est libre dans son tableau de numération : l'élève complète son quotient, avec des 0*, sans lien avec son calcul.*
- *Lors de la recherche d'un chiffre du quotient, erreur dans le choix de ce chiffre (soit par méconnaissance des tables, soit par choix d'un multiple trop petit). Ces erreurs se répercutent sur le reste partiel : il aura un chiffre supplémentaire au quotient, résultat de son calcul à partir du reste partiel, supérieur au diviseur.*
- *Erreur liée aux zéros intercalaires au quotient. Elle est liée à l'absence ou à la mauvaise utilisation du tableau de numération. L'élève trouve un dividende partiel plus petit que le diviseur et au lieu d'écrire « zéro » au quotient, il abaisse directement le chiffre suivant du dividende et poursuit sa division : cela provient aussi de la comptine qui dit « en 7 combien de fois 8 ? Cela ne se peut pas… »*
- *Erreur liée à la mauvaise compréhension de la technique opératoire.*
  Il arrive que des élèves effectuent la division de la droite vers la gauche…

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Cinquième partie

Eléments de didactique

1) Préambule

Les parties précédentes nous ont permis de se familiariser avec les définitions et propriétés des quatre opérations. L'aspect développé ici va cette fois proposer une synthèse des connaissances en didactique à prendre en compte lors de l'apprentissage des notions présentées.
En particulier, la résolution de problème va donc occuper une place importante dans la compréhension de cette partie. Nous utilisons aussi la théorie des champs conceptuels, telle que proposée par G. Vergnaud, et qui sera développée.
En effet, pouvoir faire travailler les élèves sur toutes les catégories de problèmes présentés est d'une grande aide pour leur permettre de se construire la notion de problèmes (soit, additif, soit multiplicatif)

2) Ce que disent les Institutions Officielles

Nous reprenons une partie des programmes, que vous trouverez aussi au format PDF dans leur intégralité. Il est important de prendre en compte les compétences à travailler de manière transversale, dans chacun des domaines des mathématiques :

- ✓ *Chercher*
- ✓ *Modéliser*
- ✓ *Représenter*
- ✓ *Raisonner*
- ✓ *Calculer*
- ✓ *Communiquer*

a- A l'école maternelle

Les élèves rencontrent des situations où ils sont amenés à utiliser les nombres pour anticiper le résultat d'une augmentation, d'une diminution, de la réunion de collections, ou de déplacement en avant ou en arrière. Il est bien évident que les élèves ne rendront pas compte de leur démarche en utilisant le symbolisme mathématiques (+, _, =). Il s'agira de développer des procédures personnelles.

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

b- Institutions officielles au cycle 2

Les élèves sont amenés à résoudre des problèmes relevant des structures additives (addition/soustraction) et des problèmes relevant des structures multiplicatives, de partage et de groupement (multiplication / division) par des procédures personnelles tout en étant capable de les modéliser à l'aide d'écritures mathématiques.
Ils doivent mémoriser des faits numériques et procédures (les tables d'addition et de multiplication, la multiplication par 10, etc.)
En ce qui concerne les divers types de calcul, ils devront traiter à l'oral ou à l'écrit des problèmes relevant des quatre opérations.
Ils devront connaître une technique opératoire de calcul posé pour l'addition, la soustraction et la multiplication.

c- Institutions officielles au cycle 3

Les élèves étendent leur connaissance des nombres aux « grands nombres » entiers, mais aussi, découvrent les nombres décimaux et fractionnaires, qu'ils utiliseront désormais aussi dans les recherches de problèmes.
En ce qui concerne les techniques de calcul posé, les élèves doivent connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer :

- *L'addition, la soustraction et la multiplication de nombres entiers ou décimaux ;*
- *La division euclidienne d'un entier par un entier*
- *La division d'un nombre décimal (entier ou non) par un nombre entier.*

3) Les différents types de problèmes

a- Problèmes additifs

On parle de problème additif, lorsque l'opération experte à effectuer pour obtenir la réponse au problème est la soustraction ou l'addition. Les problèmes additifs peuvent être rangés dans des catégories qu'il est important de connaître.
Nous avons choisi la classification d'un chercheur français, G. Vergnaud, qui contient quatre catégories.

1. *La transformation d'état : La situation comporte un état initial qui subit une augmentation (transformation positive) ou une diminution (transformation négative), pour aboutir à un état final. Le problème peut demander la recherche d'un des deux états ou de la transformation. Ainsi, le problème se résout par addition ou soustraction. On peut schématiser ainsi :*

$$Etat\ initial \xrightarrow{T+/-} Etat\ final$$

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

J'ai mangé 15 chocolats hier. J'en ai mangé encore 4 ce matin. Combien de chocolats ai-je mangé ces deux derniers jours ? Ce problème est du type :

$$15 \xrightarrow{T+4} ?$$

2. ***La composition d'états*** **: Il s'agit de problèmes portant sur la réunion de deux états, ou sur la partition en deux d'un état. On les schématise ainsi :**

$$\left.\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix}\right\} E$$

Guillaume a deux sacs de billes. Sachant que l'un contient 27 billes et qu'il a en tout 56 billes, combien de billes contient l'autre sac ? Le schéma est :

$$\left.\begin{matrix} 27 \\ ? \end{matrix}\right\} 56$$

3. ***La comparaison d'états*** **: C'est une catégorie de problèmes dont le but est la mesure de l'écart entre deux états, ou la recherche d'un état connaissant l'écart (positif ou négatif) avec un autre. L'inconnue peut être un des deux états, ou la valeur de l'écart. Le schéma correspondant est celui-ci :**

$$\begin{matrix} E1 \\ \updownarrow C \ +/- \\ E2 \end{matrix}$$

4. ***Composition de transformations*** **: Comme son nom l'indique, cette catégorie regroupe les problèmes évoquant 2 transformations successives, positives ou négatives. L'inconnue peut être l'une des transformations, ou la transformation résultante (et non pas la recherche d'un des états). Le schéma correspondant est le suivant :**

$$\begin{matrix} & \xrightarrow{\quad T \quad} & \\ \xrightarrow{\quad T1 \quad} & & \xrightarrow{\quad T2 \quad} \end{matrix}$$

b- Problèmes multiplicatifs

Voici les schémas de Vergnaud pour les problèmes multiplicatifs :

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Multiplication	1 | c b | ?	Une caisse contient 15 canettes de soda. Combien de canettes contiennent 4 caisses ?
Division/partition : recherche de la valeur d'une part	a | ? b | d	On remplit 4 caisses avec 60 canettes. Combien y-a-t-il de canettes par caisse ?
Division/quotition : recherche du nombre de parts	a | c ? | d	On fait des caisses de 15 canettes avec 60 canettes. Combien de caisses remplit-on ?
Proportionnalité	a | c b | ?	Avec 60 canettes, on fait 4 caisses. Combien de caisses fait-on avec 180 canettes ?

c- La proportionnalité

C'est en cycle 3 que l'exploitation de données numériques dépasse le simple cadre des problèmes relevant des quatre opérations. Les situations de proportionnalité peuvent être vues dans différents contextes. Il est par ailleurs précisé dans ce document que deux types de travaux peuvent être menés de front pour introduire la proportionnalité : un travail sur les propriétés additives et multiplicatives de la linéarité dès le début du cycle 3 et un travail sur le retour à l'unité (proportion) dès le CM 1.

Les étapes de l'apprentissage :

- Reconnaissance d'une situation de proportionnalité ou de non proportionnalité. C'est le plus souvent le contexte, ou certains mots inducteurs (« prix unitaire », « chaque », « identique », etc.) qui l'indiquent.
- Introduction du tableau de proportionnalité : il permet de résumer les informations de l'énoncé, et de le schématiser. Les procédures les plus efficaces apparaissent plus clairement.
- Utilisation des propriétés additive et multiplicative de la linéarité.
- Retour à l'unité, en trois temps dits « règle de trois » : connaissant trois termes d'une proportion on demande le quatrième. La technique revient à calculer par une division la « valeur » d'une unité, puis obtenir le terme cherché par une multiplication.

Les types de problèmes rencontrés au CM1 et au CM2 :

- Recherche d'une quatrième proportionnelle,
- Comparaison de proportions,
- Proportionnalité et pourcentages,
- Proportionnalité et vitesses moyennes,
- Proportionnalité et échelles.

Leçon de mathématique

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Attendus de fin de cycle 2	Repère de progressivité
Résoudre les problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul	
Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée… conduisant à utiliser les quatre opérations. Sens des opérations : Problèmes relevant des structures additives, multiplicatives Sens des symboles	Au CP, les élèves commencent à résoudre des problèmes additifs et soustractifs puis problèmes multiplicatifs dans le cycle. L'étude de la division, est initiée au cycle 2 dans des situations simples de partage ou de groupement. Au CE2, les élèves sont amenés à résoudre des problèmes plus complexes.
Calculer avec des nombres entiers	
Mémoriser des faits numériques et des procédures : tables d'addition et multiplication, décompositions additives et multiplicatives de 10 et de 100, compléments à une dizaine supérieure, multiplier par une puissance de 10… Elaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit. Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant ´ son ordre de grandeur, propriétés implicites des 4 opérations. Calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur. Calculer en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes. Mettre en œuvre un algorithme de calcul pose pour l'addition, la soustraction, la multiplication.	CP : additions posées : nombres à 2 chiffres. CE1 : additions posées, nombres à 3 chiffres, soustractions posées. CE2 : Multiplication posée.

Leçon de mathématique

LES QUATRE OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Attendus de fin de cycle 3	Repère de progressivité
Calcul des entiers et des décimaux	
Mémoriser des faits numériques et des procédures élémentaires de calcul. ***Elaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.*** ***Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.*** ***Propriétés implicites des opérations (commutativité, associativité, distributivité)*** ***Faits et procédures numériques additifs et multiplicatifs. Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant. Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10).*** ***Calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.*** ***Calcul en ligne : utiliser des parenthèses dans des situations très simples. Règles d'usage des parenthèses.*** ***Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division : techniques opératoires de calcul (pour la division, on se limite à diviser par un entier).*** ***Utiliser une calculatrice pour trouver où vérifier un résultat. Fonctions de base d'une calculatrice.***	CM1 : ***Addition, soustraction de décimaux. Division euclidienne.*** CM2 : ***multiplication, division d'un décimal par un entier.*** 6ème : ***division de deux décimaux***